

## تخمین نقطه تغییر در پروفایل‌های چندجمله‌ای با تغییر تدریجی در میانگین فرایند

مجید امین نیری<sup>۱</sup>، بابک محمدی<sup>۲</sup> و مونا ایوبی<sup>۳\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشیار دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

<sup>۲</sup>کارشناس ارشد مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری مهندسی صنایع - دانشگاه تربیت مدرس

### چکیده

در این مقاله، تخمین نقطه تغییر تدریجی در میانگین پروفایل‌های چندجمله‌ای مد نظر قرار می‌گیرد. بدین منظور با استفاده از رویکرد حداکثر درست‌نمایی تخمین‌زننده، نقطه تغییر تدریجی محاسبه می‌شود. عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی پس از اینکه نمودار کنترل  $T^2$  - هتلینگ هشدار مبنی بر خارج از کنترل بودن فرایند صادر کند، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو ارزیابی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی از نظر درستی و دقت تخمین‌زننده، با افزایش شیب تغییرات بهبود می‌یابد. همچنین در تغییرات کوچک و بزرگ، عملکرد مطلوب تخمین‌زننده پیشنهادی مشهود است.

**واژه‌های کلیدی:** تخمین نقطه تغییر، تغییر تدریجی<sup>۱</sup>، رویکرد حداکثر درست‌نمایی<sup>۲</sup>، پروفایل‌های چندجمله‌ای<sup>۳</sup>، کنترل فرایند آماری

### مقدمه

به کشف نقطه تغییر نیز هست. آن‌ها همچنین روشی برای شناسایی عامل هشدار ارائه دادند. شرفی و همکاران [۹] نقطه تغییر را در پروفایل‌های باینری در فاز ۲، زمانی که نوع تغییر به شکل تدریجی است، با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی به دست آوردند و همچنین در مرجع [۱۰] از روش برآوردگر حداکثر درست‌نمایی برای شناسایی زمان واقعی نقطه تغییر که شیفت آن به صورت پله‌ای است، برای پروفایل‌های پواسن در فاز ۲ استفاده کردند.

نمودارهای کنترل با وجود کارایی و توانایی بالای خود در کنترل و پایش فرایندها، توانایی تشخیص زمان واقعی و علل ریشه‌ای اختلالات به وجود آمده در فرایند را ندارند. برای بهبود کیفیت فرایند لازم است که علل ریشه‌ای انحرافات، شناسایی و برطرف شوند. هنگامی که یک نمودار کنترل، وجود انحرافات با دلیل در فرایند را هشدار می‌دهد، مهندس، فرایند جستجو را برای شناسایی منبع انحرافات آغاز می‌کند. اما نکته قابل توجه این است که اغلب زمان واقعی نقطه تغییر فرایند، قبل از زمان هشدار، توسط نمودار کنترل است. بنابراین تخمین نقطه تغییر قبل از هشدار توسط نمودار کنترل، می‌تواند منجر به کاهش مدت زمان جستجو برای شناسایی و حذف علل

اگر در مسائل کنترل کیفیت آماری، کیفیت یک محصول یا عملکرد یک فرایند، به وسیله یک رابطه بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف شود، این رابطه را پروفایل می‌نامند. تحقیقات زیادی در زمینه پروفایل‌های خطی و چندجمله‌ای انجام شده است که می‌توان به کنگ و آلباین [۱]، کیم و همکاران [۲]، گوپتا و همکاران [۳]، نورالسنا و همکاران [۴]، [۵]، سلیمانی و همکاران [۶]، زو و همکاران [۷] اشاره کرد. محمود و همکاران [۸]، از تکنیک نقطه تغییر برای کشف شیفت و همچنین زمان تغییر در پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱ استفاده کردند. تکنیک نقطه تغییر پیشنهاد شده توسط آن‌ها، قادر است علاوه بر کشف تغییر و زمان تغییر، عامل شیفت را نیز شناسایی کند. یعنی زمانی که شیفتی توسط نمودار کنترل، تشخیص داده شود، می‌توان تعیین کرد که کدام یک از پارامترهای عرض از مبدأ، شیب یا واریانس سهم بیشتری در ایجاد این شیفت داشته‌اند. زو و همکاران [۷]، روشی مبتنی بر نقطه تغییر را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد کردند. این روش با استفاده از آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته، شیفت در عرض از مبدأ و همچنین شیب و انحراف معیار را با استفاده از یک نمودار کنترل کشف می‌کند. این روش قادر

$$T_j^2 = (\hat{\beta}_j - \beta)^T \Sigma^{-1} (\hat{\beta}_j - \beta) \quad (1)$$

که در این رابطه، برآوردکننده حداقل مربعات ماتریس واریانس-کوواریانس به صورت  $\Sigma = \sigma^2 (X'X)^{-1}$  است. برآوردکننده حداقل مربعات پارامترهای پروفایل نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\beta}_j = (X'X)^{-1} X'y_j \quad (2)$$

در فاز ۲، آماره  $T^2$  دارای توزیع مربع کای با  $k+1$  درجه آزادی است.  $k+1$  تعداد پارامترهای پروفایل چندجمله‌ای درجه  $k$  است. بنابراین حد کنترل بالا برای این آماره به صورت زیر است:

$$UCL = x_{k+1, \alpha}^2 \quad (3)$$

## ۲- مدل پروفایل چندجمله‌ای درجه دو و محاسبه تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی نقطه تغییر تدریجی

### ۲-۱- پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲

مدل پروفایل در نظر گرفته شده در این مقاله، یک پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ است که رابطه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon \quad (4)$$

به طوری که  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ، همچنین  $\sigma^2$  و پارامترهای  $\beta_0$ ،  $\beta_1$  و  $\beta_2$  در این مقاله مد نظر قرار می‌گیرد، مقادیری معلوم هستند.

### ۲-۲- محاسبه تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی

#### نقطه تغییر تدریجی

در این بخش، شماره هر نمونه با نماد  $j$  نشان داده می‌شود. پروفایل چندجمله‌ای تحت کنترل، مشاهدات مستقل دارد که از توزیع نرمال با پارامترهای  $(X_i \beta, \sigma^2)$  پیروی می‌کنند، بنابراین تابع چگالی احتمال این مشاهدات به این ترتیب است:

$$f_{Y_{ij}}(y_{ij}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij} - X_i \beta)^2} \quad (5)$$

به طوری که در رابطه (۵)،  $y_{ij}$  نشان‌دهنده مشاهده سطح  $i$ ام از نمونه  $j$ ام،  $\beta$  بردار پارامترهای مدل و ماتریس  $X$  شامل مقادیر ثابت متغیرهای مستقل است.  $x_i$

ریشه‌های انحرافات فرایند شده، تا از تولید تعداد زیادی محصول معیوب، جلوگیری شود. تغییرات انجام شده در توزیع آماری یک مشخصه کیفی را می‌توان به صورت تغییر پله‌ای، تغییر تدریجی و تغییر مونوتونیک پارامتر دسته‌بندی کرد [۱۱]. ساموئل و همکاران [۱۲]، پیگناتیلو و ساموئل [۱۳]، نیشینا [۱۴]، احمدزاده [۱۵]، نورالسنا و همکاران [۱۶]، شرفی و همکاران [۱۷]، تغییر پله‌ای در فاز ۲ را مورد مطالعه قرار دادند و پری [۱۱]، فهمی و السید [۱۸]، پری و پیگناتیلو [۱۹]، آتشگر و نورالسنا [۲۰]، شرفی و همکاران [۹]، تغییر تدریجی، جان [۲۱] و سولیوان [۲۲] تغییر ایزوتونیک و پری و همکاران [۲۳]، [۲۴] و نورالسنا و شادمان [۲۵] تغییر مونوتونیک را مورد بررسی قرار دادند.

در مورد پایش پروفایل‌ها و نقطه تغییر، تا کنون رویکردی برای تخمین نقطه تغییر برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فاز ۲ ارائه نشده است، که در این مقاله مد نظر قرار می‌گیرد. در این مقاله، با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی، برای تخمین نقطه تغییر تدریجی در میانگین پروفایل‌های چندجمله‌ای و از نمودار کنترل چندمتغیره  $T^2$  هتلینگ برای پایش پارامترهای پروفایل چندجمله‌ای در فاز ۲ استفاده می‌شود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش ۱، نمودار  $T^2$  هتلینگ برای پایش پروفایل چندجمله‌ای از درجه  $k$  مرور می‌شود. در بخش ۲، مروری بر مدل پروفایل چندجمله‌ای درجه دو و محاسبه تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی نقطه تغییر تدریجی و در بخش ۳، ارزیابی عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی نقطه تغییر تدریجی ذکر می‌شوند. در بخش ۴ نیز نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

## ۱- نمودار کنترل چندمتغیره $T^2$ هتلینگ به منظور پایش پارامترهای پروفایل چندجمله‌ای درجه $k$ در فاز ۲

یکی از نمودارهایی که می‌توان از آن برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای استفاده کرد، نمودار کنترل  $T^2$  هتلینگ است که توسط کنگ و آلباین [۱] برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد شده است. این رویکرد با کمی تعدیل برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فاز ۲ می‌تواند به کار گرفته شود. آماره  $T^2$  به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

حداکثر درست‌نمایی بردار شیب تغییرات طبق رابطه (۱۱) حاصل خواهد شد:

$$\sum_{j=\tau+1}^T (j-\tau)X'(y_j - X\beta_j) - \sum_{j=\tau+1}^T (j-\tau)^2 X'Xk = 0 \quad (10)$$

بنابراین تخمین حداکثر درست‌نمایی بردار  $k$  از حل رابطه ذکرشده بر حسب  $k$  طبق رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\hat{k} = \frac{(X'X)^{-1} \sum_{j=\tau+1}^T X'(j-\tau)(y_j - X\beta)}{\sum_{j=\tau+1}^T (j-\tau)^2} \quad (11)$$

در نهایت، تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی نقطه تغییر به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau \leq T} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\tau\sigma^2} \sum_{j=i=1}^n (y_j - X_i\beta_j)'(y_j - X_i\beta_j) \\ -\frac{1}{\tau\sigma^2} \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n ([y_j - X_i\beta_j - X_i k(j-\tau)]' [y_j - X_i\beta_j - X_i k(j-\tau)]) \end{array} \right\} \quad (12)$$

### ۳- ارزیابی عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی نقطه تغییر تدریجی

برای بررسی عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی، از ۱۰ هزار بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده می‌شود. در هر تکرار پس از اینکه نمودار کنترل  $T^2$ -هتلینگ هشدار خارج از کنترل بودن فرایند را بدهد، تخمین‌زننده پیشنهادی برای تخمین نقطه تغییر تدریجی، استفاده می‌شود. برای انجام شبیه‌سازی‌ها، نمونه دهم به عنوان نقطه تغییر در نظر گرفته شده است، بنابراین باید ۱۰ نمونه اول در هر تکرار تحت کنترل باشد. بدین منظور نحوه برخورد با هشدارهای اشتباه<sup>۴</sup> قبل از نمونه دهم بدین صورت است که اگر نمونه‌ای خارج از کنترل باشد، آن نمونه حذف می‌شود و نمونه دیگری جایگزین آن می‌شود.

پروفایل تحت کنترل مورد استفاده در این مقاله، عبارت است از:

$$y_{ij} = 3 + 2x + x^2 + \varepsilon_{ij} \quad (13)$$

در نتیجه بردار  $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  است. همچنین

نشان دهنده سطر  $\tau$ ام ماتریس  $X$  است. پس از مدتی و در نمونه نامعلوم  $\tau$  که به عنوان نقطه تغییر شناخته می‌شود، فرایند از حالت تحت کنترل خارج شده و بردار  $\beta$  به صورت رابطه (۶) تغییر می‌کند و تا زمانی که نمودار کنترل، هشدار مبنی بر وقوع حالت خارج از کنترل صادر نکرده است، در این حالت باقی می‌ماند:

$$\beta_j = \beta + k(j-\tau) \text{ for } j = \tau+1, \tau+2, \dots, T, \quad (6)$$

به طوری که  $k$  بردار شیب تغییرات است. برای برآورد پارامترهای مجهول، از رویکرد حداکثر درست‌نمایی استفاده شده است. تابع درست‌نمایی مدل، طبق رابطه (۷) محاسبه می‌شود:

$$L(\tau, k|Y) = M - \prod_{j=i=1}^{\tau} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij} - X_i\beta)'(y_{ij} - X_i\beta)} \times \prod_{j=\tau+1}^T \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y_{ij} - X_i\beta - X_i k(j-\tau)]'[y_{ij} - X_i\beta - X_i k(j-\tau)]} \quad (7)$$

ماکزیمم درست‌نمایی  $\tau$ ، مقداری از  $\tau$  است که تابع بالا را ماکزیمم می‌کند. با گرفتن لگاریتم طبیعی از تابع بالا داریم:

$$L(\tau, k|Y) = M - \frac{1}{\tau\sigma^2} \sum_{j=i=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - X_i\beta)'(y_{ij} - X_i\beta) - \frac{1}{\tau\sigma^2} \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n [y_{ij} - X_i\beta - X_i k(j-\tau)]'[y_{ij} - X_i\beta - X_i k(j-\tau)] \quad (8)$$

در این عبارت  $k$  و  $\tau$  نامعلوم هستند و باید  $k$  و  $\tau$  را طوری برآورد کنیم تا ماکزیمم عبارت بالا به دست آید. این تخمین‌ها را با  $\hat{k}$  و  $\hat{\tau}$  نشان می‌دهیم. مشتق جزئی رابطه بالا نسبت به بردار مجهول  $k$  برابر است با:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial k} = \frac{-1}{\tau\sigma^2} \sum_{j=\tau+1}^T (j-\tau)X'[y_j - X\beta_j - Xk(j-\tau)] \quad (9)$$

با مساوی صفر قرار دادن رابطه بالا، رابطه (۱۰) حاصل می‌شود که از حل آن بر حسب بردار  $k$ ، تخمین‌زننده

نتایج شبیه‌سازی‌ها، با تغییرات همزمان و منفرد در پارامترهای مدل پروفایل چندجمله‌ای مورد نظر در جداول (۱) تا (۸) خلاصه شده‌اند. جداول (۱)، (۳)، (۵) و (۷) به ترتیب درستی عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی را با تغییرات همزمان و تغییرات تکی در پارامترهای اول، دوم و سوم پروفایل مورد نظر نشان می‌دهند. در این جداول، انحراف استاندارد تخمین‌ها داخل پراتز گزارش شده‌اند. همچنین جداول (۲)، (۴)، (۶) و (۸) به ترتیب دقت عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی را با تغییرات همزمان و تغییرات تکی در پارامترهای اول، دوم و سوم پروفایل مورد نظر نشان می‌دهند.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0,1)$  و مقادیر  $X$  ثابت و فاصله‌های آن مساوی بوده و برابر با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ هستند که در ابتدا برای کاهش اثر هم‌خطی چندگانه، میانگین مقادیر  $X$  از آن‌ها کم شده و تبدیل به مقادیر ۴/۵، ۳/۵، ۲/۵، ۱/۵، ۰/۵، -۰/۵، -۱/۵، -۲/۵، -۳/۵، -۴/۵ شده‌اند. نوع شیفتی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد، شیفت تدریجی در پارامترهای مدل و یا همان ضرایب پروفایل تحت کنترل مورد نظر است. همچنین فرض می‌شود تغییری در انحراف معیار فرایند رخ نمی‌دهد. به این دلیل که محدوده بررسی مقاله، فاز ۲ پروفایل‌های چندجمله‌ای است. فرض می‌شود که پارامترهای اولیه فرایند معلوم هستند.

جدول ۱: درستی تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات همزمان در پارامترهای مدل  $\tau = 10$  و  $N = 10000$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.003 \\ 0.003 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.005 \\ 0.005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$
$E(T)$	۴۸/۳۵۱۱	۳۳/۶۸۳۱	۲۷/۷۵۱۴	۲۲/۲۰۸۵	۱۷/۲۸۵۲
$\hat{A}RL$	۳۸/۳۵۱۱	۲۳/۶۸۳۱	۱۷/۷۵۱۴	۱۲/۲۰۸۵	۷/۲۸۵۲
$\hat{\tau}$	۱۵/۷۵۰۴ (۰/۱۰۶۰)	۱۳/۲۰۶۱ (۰/۰۷۰۳)	۱۲/۱۹۷۰ (۰/۰۵۵۶)	۱۱/۳۵۹۲ (۰/۰۴۰۶)	۱۰/۶۲۹۱ (۰/۰۲۶۵)

جدول ۲: دقت تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات همزمان در پارامترهای مدل  $\tau = 10$  و  $N = 10000$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.003 \\ 0.003 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.005 \\ 0.005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}$
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	۰/۰۴۱۶	۰/۰۶۰۶	۰/۰۷۸۳	۰/۱۱۴۱	۰/۱۸۰۱
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 1)$	۰/۱۱۶۷	۰/۱۷۸۲	۰/۲۲۸۶	۰/۳۰۴۹	۰/۴۶۹۷
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 3)$	۰/۲۲۶۹	۰/۳۸۸۹	۰/۴۶۹۹	۰/۶۰۵۸	۰/۸۲۱۱
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 5)$	۰/۳۸۴۹	۰/۵۴۷۷	۰/۶۳۹۱	۰/۷۹۱۴	۰/۹۵۶۶
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 7)$	۰/۴۹۳۸	۰/۶۷۳۰	۰/۷۶۵۳	۰/۹۰۷۷	۰/۹۸۴۹
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 10)$	۰/۶۹۸۳	۰/۸۴۴۰	۰/۹۲۵۸	۰/۹۹۵۱	۱/۰۰۰۰

جدول ۳: درستی تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر اول مدل

$$N = 10000 \text{ و } \tau = 10$$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_r \\ k_r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$E(T)$	۱۸/۳۸۵۱	۱۴/۹۶۰۲	۱۳/۶۸۱۰	۱۲/۹۵۶۸	۱۱/۵۴۷۸
$\hat{A}RL$	۸/۳۸۵۱	۴/۹۶۰۲	۳/۶۸۱۰	۲/۹۵۶۸	۱/۵۴۷۸
$\bar{\hat{\tau}}$	۱۰/۸۳۹۴ (۰/۰۲۹۷)	۱۰/۳۳۴۶ (۰/۰۱۹۶)	۱۰/۰۹۹۸ (۰/۰۱۵۹)	۹/۹۸۳۷ (۰/۰۱۳۹)	۹/۸۲۰۵ (۰/۰۰۸۳)

جدول ۴: دقت تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر اول مدل

$$N = 10000 \text{ و } \tau = 10$$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_r \\ k_r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	۰/۱۵۳۷	۰/۲۵۴۰	۰/۳۵۰۳	۰/۴۳۴۶	۰/۷۹۶۳
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 1)$	۰/۴۰۸۹	۰/۶۲۶۵	۰/۷۶۷۰	۰/۸۵۷۱	۰/۹۵۹۳
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 3)$	۰/۷۵۹۵	۰/۹۴۳۲	۰/۹۶۹۲	۰/۹۷۶۰	۰/۹۸۹۵
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 5)$	۰/۹۲۶۷	۰/۹۸۳۶	۰/۹۸۷۶	۰/۹۸۹۵	۰/۹۹۵۶
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 7)$	۰/۹۷۷۳	۰/۹۹۱۶	۰/۹۹۳۸	۰/۹۹۴۶	۰/۹۹۷۹
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 10)$	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

جدول ۵: درستی تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر دوم

$$N = 10000 \text{ و } \tau = 10 \text{ مدل}$$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_r \\ k_r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0.025 \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0.05 \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0.075 \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0.15 \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ 0.25 \\ \cdot \end{bmatrix}$
$E(T)$	۲۰/۸۰۸۲	۱۶/۳۹۲۷	۱۴/۷۰۰۷	۱۲/۷۹۶۷	۱۱/۹۲۵۱
$\hat{A}RL$	۱۰/۸۰۸۲	۶/۳۹۲۷	۴/۷۰۰۷	۲/۷۹۶۷	۱/۹۲۵۱
$\bar{\hat{\tau}}$	۱۱/۲۳۱۱ (۰/۰۳۶۵)	۱۰/۵۵۱۷ (۰/۰۲۴۰)	۱۰/۲۵۲۵ (۰/۰۱۹۶)	۹/۹۶۰۵ (۰/۰۱۲۹)	۹/۸۴۶۶ (۰/۰۱۰۱)

جدول ۶: دقت تخمین زنده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر دوم مدل  $N = 10000$  و  $\tau = 10$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 0)$	۰/۱۳۰۱	۰/۱۹۵۴	۰/۲۷۰۵	۰/۴۶۲۳	۰/۶۷۱۸
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 1)$	۰/۳۳۹۴	۰/۵۱۳۸	۰/۶۴۵۷	۰/۸۷۱۹	۰/۹۴۵۵
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 3)$	۰/۶۴۸۶	۰/۸۶۶۵	۰/۹۴۷۵	۰/۹۸۰۰	۰/۹۸۶۱
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 5)$	۰/۸۳۸۳	۰/۹۷۱۲	۰/۹۸۱۰	۰/۹۹۲۰	۰/۹۹۳۹
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 7)$	۰/۹۴۱۲	۰/۹۸۹۱	۰/۹۹۰۰	۰/۹۹۶۰	۰/۹۹۷۱
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 10)$	۰/۹۹۹۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

جدول ۷: درستی تخمین زنده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر سوم مدل  $N = 10000$  و  $\tau = 10$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$E(T)$	۱۷/۷۸۳۰	۱۴/۶۳۶۶	۱۳/۴۰۷۷	۱۲/۳۳۹۵	۱۱/۴۳۵۶
$\hat{A}RL$	۷/۷۸۳۰	۴/۶۳۶۶	۳/۴۰۷۷	۲/۳۳۹۵	۱/۴۳۵۶
$\bar{\hat{t}}$	۱۰/۷۸۹۳ (۰/۰۲۸۳)	۱۰/۲۲۶۷ (۰/۰۱۸)	۱۰/۰۴۵۹ (۰/۰۱۵۳)	۹/۹۰۴۷ (۰/۰۱۱۸)	۹/۷۹۶۴ (۰/۰۰۸۴)

جدول ۸: دقت تخمین زنده حداکثر درست‌نمایی تغییرات تدریجی برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ با تغییرات در پارامتر سوم مدل  $N = 10000$  و  $\tau = 10$

$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 0)$	۰/۱۷۰۳	۰/۲۷۷۰	۰/۳۷۷۷	۰/۵۴۶۸	۰/۸۱۲۳
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 1)$	۰/۴۳۷۲	۰/۶۵۳۰	۰/۸۰۲۹	۰/۹۲۰۴	۰/۹۵۸۵
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 3)$	۰/۷۸۱۰	۰/۹۵۰۵	۰/۹۶۹۶	۰/۹۸۰۷	۰/۹۸۹۵
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 5)$	۰/۹۴۰۷	۰/۹۸۲۶	۰/۹۸۸۱	۰/۹۹۲۴	۰/۹۹۵۰
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 7)$	۰/۹۸۱۸	۰/۹۹۲۱	۰/۹۹۴۲	۰/۹۹۶۰	۰/۹۹۷۳
$\hat{p}( \hat{t} - \tau  = 10)$	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

در نهایت با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی به ازای تغییرات همزمان و منفرد در پارامترهای مدل پروفایل، بررسی شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها دلالت بر عملکرد مناسب تخمین‌زننده ارائه‌شده از نظر درستی و دقت تخمین‌ها در برآورد نقطه واقعی تغییر داشته است. در این مقاله، فرض شده است که نوع تغییر به وجود آمده در فرآیند مشخص است و بر اساس آن، تخمین‌زننده مناسب، پیشنهاد شده است. بنابراین یک پیشنهاد برای تحقیقات بعدی می‌تواند ارائه تخمین‌زننده مناسب برای تخمین نقطه تغییر در پروفایل‌های چندجمله‌ای، هنگامی که نوع تغییر در فرآیند مشخص نیست، باشد.

نتایج بررسی عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی با تغییرات همزمان و منفرد در پارامترهای مدل پروفایل چندجمله‌ای، عملکرد مطلوب تخمین‌زننده پیشنهادی از نظر دستی و دقت، تخمین‌ها را در تخمین نقطه تغییر تدریجی تأیید می‌کنند. واضح است که با افزایش شیب تغییرات، عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی نیز بهبود می‌یابد. همچنین تخمین‌زننده پیشنهادی در تغییرات کوچک نیز قادر به مناسب مناسب نقطه تغییر است.

#### ۴- نتیجه و جمع‌بندی

به طور کلی تشخیص نقطه تغییر در نمودارهای کنترلی اهمیت ویژه‌ای دارد. در این مقاله با استفاده از رویکرد حداکثر درست‌نمایی، تخمین نقطه تغییر در پروفایل‌های چندجمله‌ای درجه ۲، مورد توجه قرار گرفت.

#### مراجع

- 1- Kang, L. and Albin, S. (2000). "On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile." *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 4, PP. 418-426.
- 2- Kim, K., Mahmoud, M. A. and Woodall, W. H. (2003). "On the monitoring of linear profiles." *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, No. 3, PP. 317-328.
- 3- Gupta, S., Montgomery, D. C. and Woodall, W. H. (2006). "Performance evaluation of two methods for online monitoring of linear calibration profiles." *International journal of production research*, Vol. 44, No. 10, PP. 1927-1942.
- 4- Noorossana, R., Vaghefi, S. A. and Amiri, A. (2004). "The effect of non-normality on monitoring linear profiles." *Proceeding 2<sup>nd</sup> Int. Ind. Eng. Conf.*, Riyadh, Saudi Arabia.
- 5- Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R. and Amiri, A. (2008). "Phase I Monitoring of Polynomial Profiles." *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Vol. 37, No. 10, PP. 1671-1686.
- 6- Soleimani, P., Noorossana, R. and Amiri, A. (2009). "Simple Linear Profiles Monitoring in the Presence of Within Profile Autocorrelation." *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 57, No. 3, PP. 1015-1021.
- 7- Zou, C., Zhang, Y. and Wang, Z. (2006). "Control chart based on change-point model for monitoring linear profiles." *IIE Transactions*, Vol. 38, No. 12, PP.1093-1103.
- 8- Mahmoud, M. A., Parker, P. A., Hawkins, M. D. and Woodall, W. H. (2007). "A change point method for linear profile data." *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 2, PP. 247-268.
- 9- Sharafi, A., Aminnayeri, M., Amiri, A. and Rasouli, M. (2013). "Estimating the Change Point of Binary Profiles with a Linear Trend Disturbance." *International Journal of Industrial Engineering*, Vol. 24, No. 2, PP. 123-129.
- 10- Sharafi, A., Aminnayeri, M. and Amiri, A. (2013). "A MLE Approach for Estimating the Time of Step changes in Poisson Profiles." *Scientia Iranica*, Vol. 20, No. 3, PP. 855-860.
- 11- Perry, M. B., and Pignatiello Jr, J. J. (2010). "Identifying the time of step change in the mean of autocorrelated processes." *Journal of Applied Statistics*, Vol. 37, No. 1, PP. 119-136.

- 12- Samuel, T. R., Pignatiello, J. J. Jr. and Calvin, J. A. (1998). "Identifying the time of a step change with  $\bar{X}$  control charts." *Quality Engineering*, Vol. 10, No. 3, PP. 521-527.
- 13- Pignatiello Jr, J. J. and Samuel, T. R. (2001). "Estimation of the Change Point of a Normal Process Mean in SPC Applications." *Journal of Quality technology*, Vol. 33, No. 1, PP. 82-95.
- 14- Nishina, K. (1992). "A comparison of control charts from the viewpoint of change-point estimation." *Quality and reliability engineering international*, Vol. 8, No. 6, PP. 537-541.
- 15- Ahmadzadeh, F. (2009). "Change point detection with multivariate control charts by artificial neural network." *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, DOI: 10.1007/s00170-009-2193-6.
- 16- Noorossana, R., Atashgar, K. and Saghaei, A. (2011). "An integrated supervised learning solution for monitoring process mean vector." *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 56, No. 5-8, PP. 755-765.
- 17- Sharafi, A., Amin nayeri, M. and Amiri, A. (2013). "Identifying the Time of Step Change in Binary Profiles." *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 63, No. 1-4, PP. 209-214.
- 18- Fahmy, H. M. and Elsayed, E. A. (2006). "Drift time detection and adjustment procedures for processes subject to linear trend." *International Journal of Production Research*, Vol. 44, No. 16, PP. 3257-3278.
- 19- Perry, M. B. and Pignatiello, J. J. (2006). "Estimation of the Change Point of a Normal Process Mean with a Linear Trend Disturbance in SPC." *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 3, No. 3, PP. 325-334.
- 20- Atashgar, K. and Noorossana, R. (2011). "An integrating approach to root cause analysis of a bivariate mean vector with a linear trend disturbance." *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 52, No. 1-4, PP. 407-420.
- 21- Jann, A. (2000). "Multiple change-point detection with a genetic algorithm." *Soft computing*, Vol. 4, No. 2, PP. 68-75.
- 22- Sullivan, J. H. (2002). "Detection of multiple change points from clustering individual observations." *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, No. 4, PP. 371-383.
- 23- Perry, M. B., Pignatiello, J. J. and Simpson, J. R. (2007). "Estimating the change point if the process fraction non-conforming with a Monotonic Change Disturbance in SPC." *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 3, PP. 327-339.
- 24- Perry, M. B., Pignatiello Jr, J. J. and Simpson, J. R. (2007). "Change point estimation for monotonically changing Poisson rates in SPC." *International journal of production research*, Vol. 45, No. 8, PP. 1791-1813.
- 25- Noorossana, R. and Shadman, A. (2009). "Estimating the Change Point of a Normal Process Mean with a Monotonic Change." *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, No.1, PP. 79-90.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Drift Change
- 2- Maximum Likelihood Approach
- 3- Polynomial Profile
- 4- False Alarm