

مدل کنترل موجودی احتمالی تحت سیاست خرید اعتباری

عطاالله طالعی زاده^{۱*}، علی صالحی^۲

۱. استادیار دانشکده مهندسی صنایع پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

۲. کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

(تاریخ دریافت ۹۳/۳/۱۴ - تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۹۳/۸/۷ - تاریخ تصویب ۹۳/۸/۱۰)

چکیده

در سیستم کنترل موجودی کلاسیک فرض بر این است که هزینه خرید هنگام دریافت کالا پرداخت می‌شود. اما گاهی جهت ترغیت خریدار، برای سفارش بیشتر، اجازه پرداخت معوقه به وی داده می‌شود و به این ترتیب سیاست تشویقی اعمال می‌شود. در این پژوهش یک مسئله کنترل موجودی دوره‌ای بررسی می‌شود که در آن فاصله زمانی بین دو بازپرسازی متوالی متغیری تصادفی است. در حقیقت، مدل میزان سفارش اقتصادی تحت دو سیاست تصادفی بودن فاصله زمانی بین دو بازپرسازی و لحاظ کردن سیاست پرداخت معوقه توسعه داده می‌شود. در این تحقیق مقربودن تابع متوسط سود خریدار و شرایطی که این تابع باید داشته باشد تا میزان بهینه سقف موجودی تعیین شود اثبات می‌شود. هدف اصلی تعیین سقف موجودی خریدار است به نحوی که سود آن ماکزیمم شود. در ادامه، برای تشریح مدل، مثال‌های عددی و تحلیل حساسیت ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌گان: پرداخت معوقه، فاصله بازپرسازی تصادفی، کنترل موجودی، معامله اعتباری.

مقدمه و پیشینه تحقیق

مدل‌های چندپریودی کنترل موجودی به طور عمده در زمینه‌های مختلف برای تولید و فروش استفاده می‌شوند. از طرف دیگر، برخی فرضیات این مدل‌ها در آغاز سبب شده در واقعیت امکان به کارگیری و استفاده صحیح از آن‌ها فراهم نشود. پس، برای به کارگیری آن‌ها باید تا حد امکان این فرضیات را کنار گذاشت و جهت به کارگیری واقعی آن‌ها در عمل توسعه‌هایی صورت داد. تحقیق در زمینه کنترل موجودی به دو صورت سیاست مرور پیوسته^۱ و مرور دوره‌ای^۲ انجام می‌پذیرد. در سیاست مرور پیوسته می‌توان هر لحظه، با توجه به موقعیت موجودی در دست، اقدام به بازپرسازی کرد؛ در حالی که در سیاست مرور دوره‌ای فقط در زمان‌های خاص می‌توان این کار را انجام داد. طی سالیان اخیر مسائل کنترل موجودی چندپریودی در زمینه‌های متفاوت، به خصوص زنجیره تأمین،^۳ بر اساس فرضیات و شرایط گوناگون، بسط و توسعه داده شده‌اند. برای آنکه مسئله شکل واقعی پیدا کند، طول دوره در هر یک از سیاست‌های مرور پیوسته و مرور دوره‌ای می‌تواند یک متغیر تصادفی باشد. از طرف دیگر، یکی از فرضیات اصلی در سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک همواره این بوده است که خریدار به محض دریافت کالا هزینه خرید کالا را پرداخت کند؛ در حالی که در واقعیت ممکن

است فروشنده مدت زمان معینی را برای پرداخت هزینه خرید به خریدار فرصت دهد. این شیوه معامله، که به معامله اعتباری^۴ معروف است، سیاستی تشویقی جهت جذب مشتریان بیشتر از سوی تأمین کنندگان است. نکته شایان توجه این است که خریدار می‌تواند در هر زمان از دوره اعتباری تخصیص یافته بدهی خود را پرداخت کند و بهره اضافه نپردازد. به عبارت دیگر، در سیستم کنترل موجودی تحت خرید اعتباری زمانی که سفارش صورت می‌گیرد فروشنده به اعتبار خریدار این اجازه را به وی می‌دهد که هزینه خرید را با تأخیر پرداخت کند. روشن است که معامله اعتباری هزینه‌های سیستم موجودی را دستخوش تغییر می‌کند و روابط کلاسیک در این سیستم‌ها حاکم نیست. بنابراین، هزینه‌های سیستم موجودی و سیاست بهینه آن‌ها باید دوباره محاسبه شود. تحقیقاتی که در زمینه طول دوره بازپرسازی و خرید اعتباری صورت گرفته است در ادامه می‌آید. گویال [۱] یک مسئله بازپرسازی را برای تعیین زمان بهینه در شرایطی بررسی کرد که افق برنامه‌ریزی محدود در نظر گرفته شده و تقاضا به صورت خطی کاهش یافته بود. یانگ و همکارانش [۲] نیز مانند گویال [۱] به دنبال تعیین زمان بهینه بازپرسازی بودند؛ با این تفاوت که آن‌ها تقاضا

دای [۱۴] مدلی را که در آن کالاها فسادپذیر باشند و تأخیر در پرداخت و کمبود پس‌افت جزئی مجاز باشد ارائه کردند. هونگ و لیا [۱۵] روشی ساده را برای تعیین مقدار سفارش بهینه کالاهای فسادپذیر، که نرخ فساد تابعی از توزیع نمایی است و فروشنده تخفیف نقدی را در نظر نمی‌گیرد و فقط تأخیر را مجاز می‌داند، بیان کردند. کرنگ و تان [۱۶] میزان بازپرسی بهینه را تحت یک سیاست دوسطحی از پرداخت معوقه، که به میزان سفارش وابسته است، ارائه کردند. اوایانگ و همکاران [۱۷] سیاست بهینه‌ای را برای کالاهایی که به صورت پیوسته در حال فسادند، تحت شرایطی که فروشنده تأخیر در پرداخت را مجاز می‌داند، بررسی کردند. هو و لین [۱۸] یک جریان نقدی را در مدل EOQ، که کالاها با فساد روبه‌رو هستند و تأخیر در پرداخت مجاز است و کل ارزش هزینه‌های به‌دست‌آمده حداقل شود، توسعه دادند.

تصادفی بودن طول دوره مسئله مورد بحث را کاملاً واقعی کرده که در بسیاری از صنایع، از جمله صنایع انحصاری، مشهود است. حتی در صنایع رقابتی نیز در بسیاری موارد، به علل مختلف، طول دوره می‌تواند دستخوش تغییرات فراوان شود. تحریم‌های اقتصادی کوتاه‌مدت، بحران‌های حاکم بر بازارهای داخلی و خارجی، مسائل ترخیص کالا، گشایش اعتبار، و بسیاری موارد دیگر منجر به تصادفی شدن زمان دریافت کالا و طول دوره بازپرسی می‌شوند. کمبود مواد اولیه، رکود اقتصادی، فزونی عرضه بر تقاضا، بحران‌های اقتصادی، و وقایع و حوادث طبیعی که بعضاً منجر به افزایش یا کاهش تقاضا می‌شوند، همه و همه، مواردی هستند که طول دوره بازپرسی را تحت تأثیر قرار می‌دهند. این موضوع درباره کالاهای وارداتی نیز صادق است. در نتیجه، تصادفی بودن طول دوره به انضمام معامله اعتباری مسئله مورد بحث را کاملاً به واقعیت نزدیک کرده است. در مسائل فروشنده-خریدار، به‌خصوص در کشورهای جهان سوم، جایی که فروشنده از لحاظ موقعیت جغرافیایی دارای اختیاراتی است، خریدار می‌تواند در بازه‌های زمانی تصادفی فروشنده را ملاقات کند و سطح موجودی خریدار، که به نرخ تقاضا و موقعیت موجودی و تصادفی بودن زمان وابسته است، به گونه‌ای انتخاب شود که متوسط سود او نیز ماکزیمم شود. در پژوهش حاضر یک مدل کنترل موجودی که طول دوره آن تصادفی است تحت سیاست پرداخت معوقه توسعه داده می‌شود. بنابراین تعدادی از فرض‌های ساده‌کننده سیستم‌های کنترل موجودی کلاسیک کنار گذاشته

را در طول افق برنامه‌ریزی به صورت تابعی غیر خطی در نظر گرفتند. چیانگ [۳] یک مدل مرور دوره‌ای را مدنظر قرار داد که در آن طول دوره نسبتاً بلند بود. هزینه‌های مسئله شامل هزینه خرید و نگهداری و ثابت سفارش‌دهی بود و تخفیف نیز در نظر گرفته شده بود. نکته حائز اهمیت در این تحقیق لحاظ کردن سفارش اضطراری برای پرهیز از کمبود است که با هزینه‌ای بیشتر از حالت عادی اقدام به بازپرسی می‌شود. ضمناً در این پژوهش از برنامه‌ریزی پویا استفاده شد. بلکا [۴] در یک مسئله کنترل موجودی با مرور دوره‌ای، محدودیت میزان سفارش، محدودیت میزان کمبود پس‌افت‌شده، مدت تحویل^۵ ثابت، و تقاضای تصادفی قصد داشت با بررسی تغییرات مدت تحویل و هزینه سفارش‌دهی زمان بهینه سفارش را مشخص کند. تنگ و همکارانش [۵] در مدلی که ارائه دادند به دنبال تعیین زمان بهینه بازپرسی و قیمت فروش بهینه بودند. آن‌ها تقاضا را به صورت تابعی نزولی از قیمت در نظر گرفتند و کمبود را مجاز ندانستند. محبی [۶] در یک سیستم موجودی با مرور پیوسته تقاضا را پواسون مرکب در نظر گرفت و مدت تحویل را نیز تصادفی فرض کرد. محبی و همکارانش [۷] در زمینه یک سیستم کنترل موجودی با مرور دوره‌ای و بازپرسی چندگانه و تحویل چندمرحله‌ای تحقیق کردند. آن‌ها تقاضا را گسسته فرض کردند که از توزیع پواسون^۶ تبعیت می‌کند و کمبود مجاز است و سیاست فروش از دست‌رفته^۷ در آن به کار رفته است. چیانگ [۸] یک مسئله مرور دوره‌ای را طی دو حالت کمبود پس‌افت^۸ و فروش از دست‌رفته بررسی کرد. سیاست استفاده شده R, T بود. ارتوگرال و رحیم [۹] مسئله را فقط در شرایط تصادفی بودن طول دوره بررسی کردند.

در زمینه خرید اعتباری و پرداخت معوقه^۹ نیز می‌توان به برخی منابع اشاره کرد. چونگ [۱۰] روش جایگزینی را برای تعیین مقدار سفارش اقتصادی تحت شرایط پرداخت معوقه توسعه داد. هونگ [۱۱] یک مدل دوسطحی خرید اعتباری را ارائه کرد که در آن علاوه بر اینکه زمان پرداخت معوقه را فروشنده به خریدار اعلام می‌کند خریدار نیز می‌تواند زمان پرداخت معوقه را به فروشنده اعلام کند. چونگ و لیا [۱۲] مسئله تعیین مقدار سفارش اقتصادی را برای کالاهای فسادپذیر، که نرخ فساد از توزیع نمایی تبعیت می‌کند، تحت شرایطی که میزان سفارش به زمان پرداخت معوقه بستگی دارد، بررسی کردند. جمال و همکارانش [۱۳] سیاست سفارش‌دهی را تحت خرید اعتباری، وقتی کمبود مجاز است، توسعه دادند. چنگ و

۳. تقاضا ثابت است.
۴. کسری از کمبود می‌تواند حالت پس‌افت پیدا کند.
۵. کل کالای خریداری شده به فروش خواهد رسید.
۶. فقط یک تأمین‌کننده (فروشنده) وجود دارد.
۷. نرخ هزینه سرمایه بیش از نرخ بهره دریافتی حاصل از فروش کالاهایی است که هنوز پول خرید آن پرداخت نشده است.

مدل‌سازی

چون فاصله‌های زمانی بین دو بازپرسی متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، ماکزیمم‌کردن سود دوره معادل ماکزیمم‌کردن کل دوره است. در نتیجه، مسئله برای یک دوره مدل‌سازی می‌شود. از طرف دیگر، می‌دانیم که فاصله زمانی دو بازپرسی (Z) تصادفی است و باید در این فواصل زمانی سفارش انجام شود. در این قسمت ابتدا پارامترها و متغیرهای تصمیم مستقل و وابسته بیان می‌شود. سپس متوسط سود در یک دوره مدل‌سازی می‌شود. پارامترهای مورد استفاده در این پژوهش در ادامه می‌آید.

پارامترها

Z	فاصله زمانی بین دو بازپرسی (طول سیکل) که یک متغیر تصادفی است؛ $(z_{\min} \leq Z \leq z_{\max})$
P	قیمت فروش هر واحد کالا در یک سیکل؛
w	هزینه خرید هر واحد کالا در یک سیکل؛
h	هزینه نگهداری هر واحد کالا در هر واحد زمان؛
π	هزینه هر واحد کمبود پس‌افت؛
β	درصدی از تقاضا که پس‌افت می‌شود؛
M	زمان پرداخت معوقه که خریدار اعلام می‌کند؛
D	نرخ ثابت و مشخص تقاضا در یک سیکل؛
I_e	نرخ بهره دریافتی در یک سیکل؛
I_c	نرخ بهره پرداختی در یک سیکل؛
i	نرخ هزینه نگهداری در یک سیکل؛

متغیر تصمیم مستقل

R سقف موجودی در یک سیکل؛

متغیرهای تصمیم وابسته

$f(z)$ تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی Z ؛

می‌شوند؛ بدین شکل که برای درآمد ناشی از فروش محصولات که هنوز پول خرید آن پرداخت نشده است و در بانک نگهداری می‌شود سود در نظر گرفته می‌شود. همچنین لزومی ندارد زمان پرداخت هزینه معوقه قبل از پایان همان سیکل باشد. از طرف دیگر، در شرایطی که هزینه خرید پرداخت نشده است نباید برای کالاهای داخل انبار هزینه‌های سرمایه را لحاظ کرد. بنابراین، در این پژوهش در هر سیکل سقف سطح موجودی تحت سیاست خرید اعتباری به نحوی تعیین می‌شود که متوسط سود حاصله ماکزیمم شود.

تعریف مسئله

چارچوب اصلی مسئله مورد بررسی در این پژوهش بدین شرح است که خریدار برای سفارش دسته‌ای از محصولات خود با فروشنده‌ای در ارتباط است و فروشنده به خریدار اختیار می‌دهد که هزینه‌های محصولات سفارشی را با تأخیر پرداخت کند و زمان بازپرسی می‌تواند به صورت کاملاً تصادفی رخ دهد. در حقیقت، طول دوره بازپرسی یا سیکل سیستم کنترل موجودی کاملاً تصادفی است. همچنین، مسائل مرتبط با سیاست پرداخت معوقه به زمان پرداخت، هزینه معوقه، و نرخ بهره‌های دریافتی و پرداختی به شدت حساس‌اند. در حقیقت، در این تحقیق با یک مدل کنترل موجودی دوره‌ای مواجهیم که در آن فواصل زمانی بین دو بازپرسی متوالی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع‌اند. تقاضایی که به سیستم وارد می‌شود ثابت و مشخص است و ضمناً در صورت بروز کمبود (کمبود مجاز است) درصدی پس‌افت و درصدی فروش از دست‌رفته می‌شود. هزینه‌های سیستم کنترل موجودی شامل هزینه نگهداری، هزینه کمبود پس‌افت و فروش از دست‌رفته، و هزینه خرید است. از لحاظ موقعیت زمانی پرداخت معوقه (M) شامل دو حالت است: ۱. زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود وجود ندارد؛ ۲. زمان پرداخت معوقه در بازه‌ای از زمان قرار بگیرد که کمبود رخ داده است. در این شرایط قرار است در هر سیکل سقف سطح موجودی (متغیر تصمیم R) به نحوی تعیین شود که متوسط سود حاصله ماکزیمم شود. به طور کلی فرضیات مسئله عبارت‌اند از:

۱. فاصله زمانی بین دو بازپرسی متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع است.
۲. هزینه موجود در مسئله هزینه نگهداری و کمبود و سرمایه و خرید است.

متوسط فروش ازدست‌رفته و پس‌افت

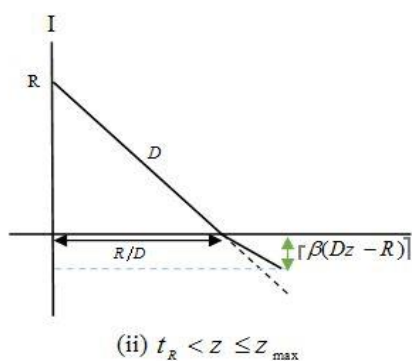
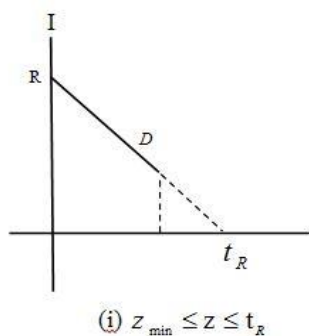
در شکل ۱ مشاهده می‌شود که درصدی از کمبود به صورت پس‌افت است. طبق فرضیات مطرح‌شده، β بیانگر درصدی از کمبود است که به صورت پس‌افت است و $1 - \beta$ بیانگر درصدی از کمبود است که به صورت فروش ازدست‌رفته است.

میزان کل کمبود (تقاضای برآورده‌نشده)، میزان فروش ازدست‌رفته، و نهایتاً میزان کمبود پس‌افت به ترتیب در رابطه‌های ۴ و ۵ و ۶ می‌آید:

$$\int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \quad (4)$$

$$L = (1 - \beta) \int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \quad (5)$$

$$B = \beta \int_{t_R}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \quad (6)$$



شکل ۱. نمایش شکل موجودی

متوسط مقدار سفارش در یک سیکل

متوسط مقدار سفارش در یک دوره برابر است با مجموع تعداد کالاهای سفارشی در دوره‌ای که کمبود وجود دارد و در دوره‌ای که کمبود وجود ندارد. با توجه به شکل ۱، میزان سفارش برابر است با:

زمانی که موجودی در دست به صفر می‌رسد؛

$t_R = R/D$	t_R
متوسط کل موجودی در هر سیکل؛	I
متوسط فروش ازدست‌رفته در هر سیکل؛	L
متوسط مقدار پس‌افت در هر سیکل؛	B
متوسط مقدار سفارش در هر سیکل؛	Q
متوسط هزینه‌های موجودی در هر سیکل؛	TC
متوسط بهره‌اقتصادی توسط خریدار؛	IE
متوسط بهره‌پرداختی توسط خریدار؛	IC
متوسط سود کل پیش‌بینی‌شده؛	TP

مدل‌سازی سود پیش‌بینی‌شده

با توجه به فرضیات مسئله و متغیرهای وابسته و مستقل، نمودارهای سیستم موجودی در دو حالت بررسی می‌شود. حالت اول در شرایطی است که فاصله زمانی بین بازسازی‌ها کوچک‌تر از زمانی باشد که سطح موجودی به صفر می‌رسد و کمبود وجود ندارد. حالت دوم در شرایطی است که فاصله زمانی بین دو بازسازی بیش از زمانی است که طول می‌کشد تا سطح موجودی به صفر برسد و کمبود رخ دهد. با توجه به آنچه آمد مدل‌سازی انجام می‌شود. برای آنکه بتوان سود پیش‌بینی‌شده را مدل‌سازی کرد، ابتدا متوسط موجودی در هر سیکل، سپس متوسط فروش ازدست‌رفته و پس‌افت، و در انتها متوسط مقدار سفارش محاسبه می‌شود.

متوسط موجودی در یک سیکل

متوسط سطح موجودی در سیکلی که در آن کمبود وجود ندارد در رابطه ۱، در سیکلی که در آن کمبود وجود دارد در رابطه ۲، و کل موجودی در رابطه ۳ می‌آید.

$$R - \frac{1}{2} Dz \quad (1)$$

$$\frac{R}{2} \frac{R}{D} \frac{1}{z} = \frac{R^2}{2Dz} \quad (2)$$

$$I = \int_{z_{\min}}^{t_R} z \left(R - \frac{1}{2} Dz \right) f(z) dz \quad (3)$$

$$+ \int_{t_R}^{z_{\max}} z \frac{R^2}{2Dz} f(z) dz$$

$$\begin{aligned}
 TP &= pQ - [wQ + hI + ((p-w)L + \pi B)] \\
 &\quad + IE - IC \\
 &= (p-w) \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} (Dz) f(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R/D}^{z_{\max}} (R + \beta(Dz - R)) f(z) dz \right] \\
 &\quad - iw \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \left(Rz - \frac{1}{2} Dz^2 \right) f(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{R^2}{2D} f(z) dz \right] \\
 &\quad - (p-w)(1-\beta) \int_{R/D}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \\
 &\quad - \pi\beta \int_{R/D}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \\
 &\quad + Ip \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{(M-z)(R-DM)}{2} f(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R/D}^{z_{\max}} \left(\frac{(M-z)(R-DM)}{2} + \beta(Dz-R)(M-z) \right) f(z) dz \right] \\
 &\quad - Icw \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{(R-DM)^2}{2D} f(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{(R-DM)^2}{2D} f(z) dz \right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

حالت دوم: اگر $Z < t_R < M$ رخ دهد، باید همانند حالت اول عمل کرد؛ با این تفاوت که دیگر هزینه سرمایه وجود ندارد. پس متوسط سود کل، که تابعی از سقف موجودی است، برابر است با:

$$\begin{aligned}
 TP &= Revenue - TC \\
 &= Revenue - Purchasing cost \\
 &\quad - Holding cost - Shortage cost \\
 &= pQ - [wQ + hI + ((p-w)L + \pi B)] + IE - IC \\
 &= (p-w) \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} (Dz) f(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R/D}^{z_{\max}} (R + \beta(Dz - R)) f(z) dz \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$Q = \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} Dz f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} (R + \beta(Dz - R)) f(z) dz \right] \tag{7}$$

متوسط سود کل در یک سیکل

اگر ویزیتور وارد سیستم نشود و سفارشی رخ ندهد، پرداخت معوقه‌ای وجود نخواهد داشت. در نتیجه قطعاً $M > Z$ است. دو حالت وجود دارد:

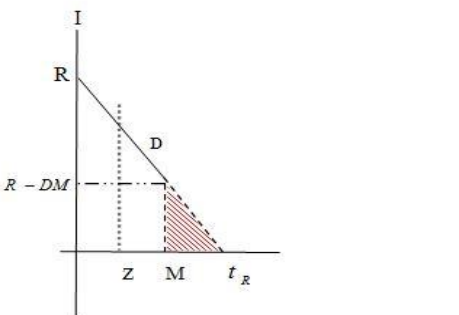
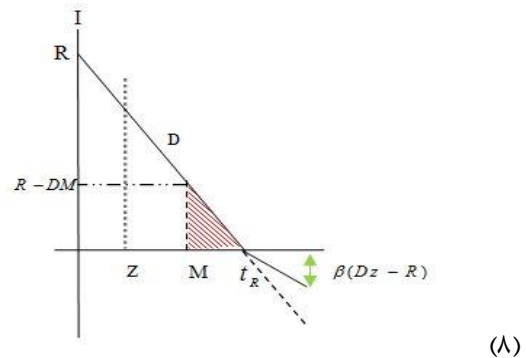
حالت اول: $Z < M < t_R$

حالت دوم: $Z < t_R < M$

در هر یک از دو حالت فوق باید متوسط سود مستقیم از فروش محصولات محاسبه شود. هزینه‌ها شامل هزینه خرید، کمبود، نگهداری، و سرمایه است.

حالت اول: اگر $Z < M < t_R$ رخ دهد، با توجه به رابطه‌های ۱ تا ۷ و شکل‌های ۲ و ۳ می‌توان متوسط سود کل را، که تابعی از سقف موجودی است، به دست آورد. بنابراین:

$$\begin{aligned}
 TP &= Revenue - TC \\
 &= Revenue - Purchasing cost - Holding cost - Shortage cost - Capital cost
 \end{aligned}$$



شکل ۲. نمودار بهره‌برداری از سوی خریدار در حالت $Z < M < t_R$

شرطی به دست خواهد آمد که تحت آن شرط تابع TP نسبت به R مقعر شود.

لم ۱. تابع TP در حالت اول، در بازه (z_{\min}, z_{\max}) نسبت به R مقعر است.

اثبات: نشان می‌دهیم که مشتق دوم تابع TP نسبت به R منفی است. مشتق اول تابع TP نسبت به R برابر است با:

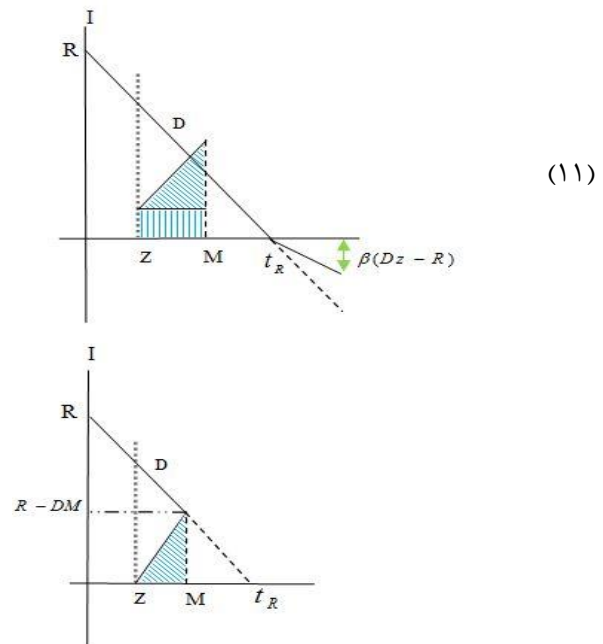
$$\begin{aligned} \frac{\partial(TP)}{\partial R} &= (p-w) \int_{R/D}^{z_{\max}} (1-\beta) f(z) dz \\ &- iw \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} z f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{R}{D} f(z) dz \right] \\ &+ [(p-w)(1-\beta) + \pi\beta] \int_{R/D}^{z_{\max}} f(z) dz \\ &+ I_e p \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{1}{2} (M-z) f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \left(\frac{1}{2} - \beta \right) (M-z) f(z) dz \right] \\ &- I_c w \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{R-DM}{D} f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{R-DM}{D} f(z) dz \right] \end{aligned} \quad (12)$$

و مشتق دوم تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2} &= -(p-w) \frac{1-\beta}{D} f(z) \\ &- iw \left[\int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{1}{D} f(z) dz \right] \\ &- \frac{1}{D} f(z) [(p-w)(1-\beta) + \pi\beta] \\ &+ I_e p \frac{\beta}{D} \left(M - \frac{R}{D} \right) f(z) \\ &- I_c w \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{1}{D} f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{1}{D} f(z) dz \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2} < 0$$

$$\begin{aligned} &- iw \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \left(Rz - \frac{1}{2} Dz^2 \right) f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{R^2}{2D} f(z) dz \right] \\ &- (p-w)(1-\beta) \int_{R/D}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \\ &- \pi\beta \int_{R/D}^{z_{\max}} (Dz - R) f(z) dz \end{aligned}$$



شکل ۳. نمودار بهره‌دریافتی از سوی خریدار در حالت $Z < M < t_R$

$$\begin{aligned} &+ I_e p \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{(M-z)(R-DM)}{2} f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \left(\frac{(M-z)(R-DM)}{2} + \beta(Dz - R)(M-z) \right) f(z) dz \right] \end{aligned}$$

الگوریتم حل

در این قسمت مقربودن توابع سود در هر دو حالت اثبات می‌شود. برای آنکه روشن شود توابع سود پیش‌بینی‌شده نسبت به R مقعرند، ثابت می‌شود که مشتق دوم TP نسبت به R در حالت اول منفی است و برای حالت دوم

$$\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2} = \frac{-1}{D} \begin{bmatrix} (p-w)(1-\beta)f(z) \\ +iw \int_{R/D}^{z_{\max}} f(z) dz \\ +f(z) \left[\begin{matrix} (p-w)(1-\beta) \\ +\pi\beta \end{matrix} \right] \\ -I_e p \beta \left(M - \frac{R}{D} \right) f(z) \end{bmatrix} \quad (16)$$

با استفاده از محاسبات جبری می‌توان انتظار داشت تا زمانی که رابطه ۱۷ برقرار است، تابع TP در حالت دوم در بازه (z_{\min}, z_{\max}) تابعی مقعر است.

$$I_e < \frac{\left(\begin{matrix} f(z) [2(p-w)(1-\beta) + \pi\beta] \\ -iwF(R/D) + iw \end{matrix} \right)}{\beta \left(M - \frac{R}{D} \right) f(z)} \quad (17)$$

حال تابع TP در بازه (z_{\min}, z_{\max}) در هر یک از حالت‌های اول و دوم تا زمانی که $R > 0, D > 0$ و $0 < \beta \leq 1, f(t_R) > 0, l \geq l \geq 0, p > w > 0$ برقرار باشند مقعر است. از طرف دیگر، برای بازه $-\infty < t_R < z_{\min}$ ، که در آن $f(t_R) = 0$ است، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که تابع TP نسبت به R در بازه $-\infty < R \leq Dz_{\max}$ مقعر است. بنابراین، می‌توان یک جواب بهینه یکتایی در بازه $[-\infty, Dz_{\max}]$ به دست آورد.

مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی بررسی می‌شود. ارتوگراول و رحیم [۹] در مقاله خود هشت مسئله را طرح و آن را حل کردند. در این قسمت از برخی اطلاعات مسائلی که ایشان ارائه کردند استفاده می‌شود و سایر پارامترها مقادیر $I_e = 0, D = 5, w = 40, \pi = 2, i = 0.1$ را دارند. در هر یک از حالت‌های اول و دوم هشت مسئله، که در همه آن‌ها زمان بین دو بازپرسی از تابع چگالی نمایی با پارامتر λ تبعیت می‌کند، حل می‌شود. برای حل مدل با قراردادن $f(z) = \lambda e^{-\lambda z}$ در رابطه‌های ۱۲ و ۱۵ و با استفاده از توابع ۹ و ۱۱ متوسط سود کل پیش‌بینی شده محاسبه می‌شود. خروجی مدل در جدول‌های ۱ و ۲ می‌آید. همان‌گونه که انتظار می‌رفت در حالت دوم چون هزینه سرمایه وجود ندارد سود به دست آمده بیشتر از حالت اول است. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ می‌توان گفت با افزایش قیمت فروش

باید توجه داشت در مشتق‌گیری، با توجه به اینکه در حدود انتگرالی که باید از آن مشتق گرفته شود متغیر تصمیم وجود دارد، باید از رابطه زیر استفاده شود.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = [f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)] + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

از آنجا که $M < t_R$ است، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{\partial^2(TP)}{\partial R^2}$ همیشه منفی است. بنابراین، تابع TP نسبت به R در بازه (z_{\min}, z_{\max}) مقعر است.

لم ۲. تابع TP در حالت دوم در بازه (z_{\min}, z_{\max}) نسبت به R مقعر است. اگر

$$I_e < \frac{\left(\begin{matrix} f(z) [2(p-w)(1-\beta) + \pi\beta] \\ -iwF(R/D) + iw \end{matrix} \right)}{\beta \left(M - \frac{R}{D} \right) f(z)} \quad (14)$$

اثبات: مشتق اول تابع TP نسبت به R برابر است با:

$$\frac{\partial(TP)}{\partial R} = (p-w) \int_{R/D}^{z_{\max}} (1-\beta)f(z) dz - iw \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} z f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{R}{D} f(z) dz \right] + [(p-w)(1-\beta) + \pi\beta] \int_{R/D}^{z_{\max}} f(z) dz \quad (15)$$

$$+ I_e p \left[\int_{z_{\min}}^{R/D} \frac{1}{2} (M-z) f(z) dz + \int_{R/D}^{z_{\max}} \frac{1}{2} (1-\beta)(M-z) f(z) dz \right]$$

و مشتق دوم تابع TP نسبت به R برابر است با:

می توان نتیجه گرفت که با افزایش زمان پرداخت معوقه متوسط سقف سطح موجودی و سود به دست آمده برای خریدار نیز افزایش می یابد؛ که کاملاً منطقی است.

سود به دست آمده نیز بیشتر می شود. به عبارت دیگر، با افزایش قیمت فروش و با ثابت نگه داشتن سایر پارامترها متوسط سود کل پیش بینی شده افزایش می یابد. همچنین،

جدول ۱. نتایج به دست آمده برای حالت اول

parameters				Profits	
P	β	λ	M	R^*	TP^*
۱۲۰	۰,۵	۱/۱۵	۱۲	۸۴,۳۱	۲۹۵۰۵
۱۲۰	۰,۵	۱/۳۵	۳۲	۱۸۸	۳۴۰۵۱
۱۲۰	۰,۹	۱/۱۵	۱۲	۸۳,۴۴	۳۰۱۷۳
۱۲۰	۰,۹	۱/۳۵	۳۲	۱۸۷,۶	۳۴۶۴۶
۱۵۰	۰,۵	۱/۱۵	۱۲	۸۵,۶۴	۴۷۷۵۶
۱۵۰	۰,۵	۱/۳۵	۳۲	۱۸۸,۶۷	۸۲۳۴۶
۱۵۰	۰,۹	۱/۱۵	۱۲	۸۴,۵۱	۴۸۷۲۸
۱۵۰	۰,۹	۱/۳۵	۳۲	۱۸۸,۰۲	۸۳۳۷۶

جدول ۲. نتایج به دست آمده برای حالت دوم

parameters				Profits	
P	β	λ	M	R^*	TP^*
۱۲۰	۰,۵	۱/۱۵	۱۸	۹۵,۹۵	۴۳۷۸۰
۱۲۰	۰,۵	۱/۳۵	۳۸	۱۵۱,۸۷	۵۶۸۶۰
۱۲۰	۰,۹	۱/۱۵	۱۸	۸۹,۷۶	۴۳۹۹۴
۱۲۰	۰,۹	۱/۳۵	۳۸	۱۸۳	۵۴۱۱۹
۱۵۰	۰,۵	۱/۱۵	۱۸	۱۰۰	۶۷۰۰۰
۱۵۰	۰,۵	۱/۳۵	۳۸	۱۷۵,۲۷	۱۰۳۸۱۰
۱۵۰	۰,۹	۱/۱۵	۱۸	۱۰۰	۶۷۰۰۰
۱۵۰	۰,۹	۱/۳۵	۳۸	۱۸۳,۳	۱۰۵۵۴۰

تحلیل حساسیت

در این قسمت سعی می شود با تغییر در برخی متغیرهای ورودی مسئله درصد تغییراتی که در R^* و TP^* به وجود می آید بررسی شود. از آنجا که مثال عددی ارائه شده شانزده حالت مختلف دارد، در این قسمت فقط به مسئله ای پرداخته می شود که $R^* = ۱۸۳,۳$ و $TP^* = ۱۰۵۵۴۰$ است.

در جدول ۳ می توان مشاهده کرد که R^* و TP^* به نرخ تقاضا و قیمت فروش و خرید هر واحد کالا به شدت حساس اند. از طرف دیگر، با افزایش درصد تغییرات در پارامترهای D, p, β و I_e ، میزان متوسط سود به دست آمده نیز افزایش می یابد. همچنین، با کاهش درصد

تغییرات در این پارامترها می توان کاهش میزان متوسط سود به دست آمده را مشاهده کرد. به عبارت دیگر، با افزایش و کاهش درصد تغییرات در این پارامترها مقدار تابع هدف به ترتیب افزایش و کاهش می یابد. پارامتر w هزینه خرید هر واحد کالا است. طبق جدول ۳، با افزایش تغییرات در این پارامتر متوسط سقف موجودی و مقدار TP^* کمتر می شود و هر چه درصد تغییرات در این پارامتر کمتر شود خریدار عایدی بیشتری به دست می آورد؛ که کاملاً منطقی است و می توان به درستی مدل سازی اذعان داشت.

با توجه به نتایج تحلیل حساسیت انجام شده، پارامترهای فوق را می توان از پارامترهایی دانست که نقشی مهم و تعیین کننده بر رفتار تابع هدف دارند.

جدول ۳. نتایج تحلیل حساسیت

درصد تغییرات در مقادیر پارامترها	درصد تغییرات متغیرهای تصمیم		
	R^*	TP^*	
D	+۶۰	۵۹,۹۹	۵۹,۹۹
	+۲۰	۱۹,۹۹	۲۰
	-۲۰	-۲۰,۰۲	-۱۹,۹۹
	-۶۰	-۶۰	-۶۰
p	+۶۰	۰,۶۱	۶۷,۶۵
	+۲۰	۰,۲۷	۲۲,۵۴
	-۲۰	-۰,۴۱	-۲۲,۵۳
	-۶۰	-۲,۵	-۶۷,۴۵
w	+۶۰	-۰,۹۷	-۷,۴۹
	+۲۰	-۰,۳۲	-۲,۵۱
	-۲۰	۰,۳۱	۲,۵۲
	-۶۰	۰,۹۵	۷,۶۱
c	+۶۰	-۰,۰۰۱	-۰,۰۰۴
	+۲۰	-۰,۰۰۰۵	-۰,۰۰۱۴
	-۲۰	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۱۵
	-۶۰	۰,۰۰۱	۰,۰۰۴
I_e	+۶۰	-۲,۳	۳۶,۹۹
	+۲۰	-۱,۰۲	۱۲,۲۲
	-۲۰	۱,۴۷	-۱۲,۰۲
	-۶۰	۶۲,۵۱	-۶۶,۵۴

نتیجه گیری

در این پژوهش یک مدل بازپرسازی، که زمان بازپرسازی آن یک متغیر کاملاً تصادفی است، تحت شرایط پرداخت معوقه توسعه داده شد. در مدل سازی صورت گرفته، پس از به دست آوردن هزینه های اساسی در سیستم کنترل موجودی و محاسبه توابع سود، مقعربودن توابع هدف در هر دو حالت اثبات شد. پس، می توان نتیجه گرفت در بازه ای که تقعر تابع ثابت می ماند حداکثر سود را می توان انتظار داشت. در انتها، با یک مثال عددی، حل بهینه مدل ارائه شده، با استفاده از تابع چگالی نمایی، به دست آمد. مثال عددی نشان داد با افزایش قیمت فروش و افزایش درصدی از تقاضا که پس افت می شود سود حاصله نیز افزایش می یابد.

برای توسعه مدل ارائه شده در این تحقیق در نظر گرفتن هر یک از عواملی که در پی می آید می تواند موضوعی جدید برای تحقیقات آینده باشد:

۱. نرخ تقاضا به صورت تابعی خطی یا غیر خطی در نظر گرفته شود.
۲. زمان پرداخت معوقه به صورت جزئی وابسته به مقدار سقف موجودی باشد.
۳. برخی پارامترهای مسئله فازی، احتمالی، یا استوار در نظر گرفته شود و مسئله با رویکردی جدید حل شود.
۴. مسئله با فرض فسادپذیری کالای خریداری شده در نظر گرفته شود.

REFERENCES

1. Goyal, S. K. and Giri, B. C. (2003). "A simple rule for determining replenishment intervals of an inventory item with linear decreasing demand rate." *International Journal of Production Economics*, 83, 139-142.
2. Yang, J., Zhao, G. Q., and Rand, G. K. (1999). "Comparison of several heuristics using an analytic procedure for replenishment with non-linear increasing demand." *International Journal of Production Economics*, 58, 49-55.
3. Chiang, C. (2003). "Optimal Replenishment for a Periodic Review Inventory System With Two Supply Modes." *European Journal of Operational Research*, 149, 229-244.
4. Bylka, S. (2005). "Turnpike Policies for Periodic Review Inventory Model with Emergency Orders." *International Journal of Production Economics*, 93-94, 357-373.
5. Teng, J. T., Chang, C. T., and Goyal, S. K. (2005). "Optimal pricing and ordering policy under permissible delay in payment." *International Journal of Production Economics*, 97, 121-129.
6. Mohebbi, E. "A Replenishment Model for the Supply-Uncertainty Problem." *International Journal of Production Economics*, 87, 25-37.
7. Mohebi, E., Morton, J. M., and Posner, K. (2002). "Multiple Replenishment Orders in Continuous-Review Inventory System With Lost Sales." *Operation Research Letters*, 30, 117-129.
8. Chiang, C. (2006). "Optimal Ordering Policies for Periodic-Review Systems with Replenishment Cycles." *European Journal of Operational Research*, 170, 44-56.
9. Ertogral, K. and Rahim, M. A. (2005). Replenish-Up-To Inventory Control Policy with Random Interval Replenishment, *International Journal of Production Economics*, 93-94, 399-405.
10. Chung, K. J. (1998). "A Theorem on the Determination of Economic Order Quantity under Conditions of Permissible Delay in Payments." *Computers & Operations Research*, 25, 49-52.

11. Huang, Y. F. (2003). "Optimal Retailer's Ordering Policies in the EOQ Model under Trade Credit Financing." *Journal of Operational Research Society*, 54, 1011-1015.
12. Chung, K. J. and Liao, J. J. (2004). "Lot-Sizing Decisions under Trade Credit Depending on the Ordering Quantity," *Computers & Operations Research*, 31, 909-928.
13. Jamal, A., Sarker, B., and Wang, S. (1997). "An Ordering Policy for Deteriorating Items with Allowable Shortage and Permissible Delay in Payment." *Journal of Operational Research Society*, 48, 826-833.
14. Chang, H. J. and Dye, C. Y. (2001). "An Inventory Model for Deteriorating Items with Partial Backlogging and Permissible Delay in Payments." *Journal of Systems Science*, 32, 345-352.
15. Huang, K. N. and Liao, J. J. (2008). "A Simple Method to Locate the Optimal Solution for Exponentially Deteriorating Items under Trade Credit Financing," *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 965-977.
16. Kreng, V. B. and Tan, S. J. (2010). "The Optimal Replenishment Decisions under Two Levels of Trade Credit Policy Depending on the Order Quantity." *Expert Systems with Applications*, 37, 5514-5522.
17. Ouyang, L. Y., Wu, K. S., and Yang, C. T. (2006). "A Study on an Inventory Model for Non-Instantaneous Deteriorating Items with Permissible Delay in Payments." *Computers and Industrial Engineering*, 51, 637-651.
18. Hou, K. L. and Lin, L. C. (2009). "A Cash Flow Oriented EOQ Model with Deteriorating Items under Permissible Delay in Payments." *Journal of Applied Sciences*, 9, 1791-1794.

واژگان لاتین به ترتیب استفاده در متن

1. Continues Review
2. Periodic Review
3. Supply Chain
4. Trade credit
5. Lead Time
6. Poisson
7. Lost Sale
8. Back Logged
9. Delay in payment
10. Service Level