

## تخمین نقطه تغییر یکنوای افزایشی در پارامترهای مدل پروفایل چندجمله‌ای

مونا ایوبی<sup>۱</sup>، رضا برادران کاظمزاده<sup>۲\*</sup>

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران غرب

۲. دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۲۰، تاریخ دریافت اصلاح شده: ۹۵/۰۴/۰۹، تاریخ تصویب: ۹۵/۰۷/۱۱)

### چکیده

در این پژوهش، رویکرد حداکثر درست‌نمایی به منظور تخمین نقطه تغییر یکنوای افزایشی در پارامترهای یک پروفایل چندجمله‌ای در فاز ۲ توسعه داده می‌شود. همچنین، با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی با عملکرد تخمین‌زننده نقطه تغییر پله‌ای به‌ازای تغییرات افزایشی مقایسه می‌شود. دو معیار صحت و دقت تخمین‌زننده‌ها به‌عنوان معیارهای ارزیابی عملکرد در این پژوهش مدنظر قرار می‌گیرند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند تخمین‌زننده پیشنهادی به‌ازای تغییرات افزایشی عملکرد مناسبی از نظر صحت و دقت تخمین‌ها دارد. همچنین، تخمین‌زننده پیشنهادی نسبت به تخمین‌زننده نقطه تغییر پله‌ای این مزیت را دارد که بدون نیاز به آگاهی درمورد نوع تغییر قابل استفاده است و تنها فرض موجود، افزایشی بودن جهت تغییرات است.

**واژه‌های کلیدی:** پروفایل چندجمله‌ای<sup>۱</sup>، تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی<sup>۲</sup>، تخمین نقطه تغییر<sup>۳</sup>، تغییر یکنوای افزایشی<sup>۴</sup>، کنترل فرایند آماری.

### مقدمه

در فاز ۱ است، اما رویکرد EWMA-R به دلیل شناسایی تغییرات کوچک، برای شناسایی سریع تغییرات در فاز ۲ کاربرد بیشتری دارد، درحالی‌که هدف فاز ۱ شناسایی سریع تغییرات نیست. علاوه بر این، زمانی که یک نمودار کنترل EWMA هشدار خارج از کنترل بودن فرایند را بدهد، به دلیل وابستگی آماره‌های آن نمونه‌های بسیاری ممکن است به بروز این مشکل منجر شده باشند؛ بنابراین، مشکل شناسایی دقیق نمونه‌های خارج از کنترل و حذف آن‌ها را به همراه دارد. کیم و همکاران [۳] نیز استفاده از سه نمودار کنترل مجزای نوع شوهارت را با استفاده از روش تصحیح از میانگین کردن مقادیر متغیر مستقل به منظور برقراری استقلال میان مقادیر برآوردهای شیب و عرض از مبدأ ارائه کردند. محمود و وودال [۲] نیز استفاده از آزمون کلی  $F$  را توصیه کرده‌اند. در این رویکرد، با استفاده از متغیرهای تصادفی نشانگر برابری دو یا چند خط رگرسیون بررسی می‌شود. محمود و همکاران [۴] با استفاده از رویکرد نقطه تغییر و آماره مبتنی بر آزمون نسبت درست‌نمایی (LRT) و با فرض وجود تغییر پله‌ای در پارامترهای فرایند

در بسیاری از کاربردهای کنترل فرایند آماری، عملکرد یک فرایند یا کیفیت یک محصول از طریق رابطه رگرسیونی میان یک یا چند متغیر پاسخ با یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود. این رابطه در اصطلاح پروفایل نامیده می‌شود؛ یعنی ویژگی کیفی مورد نظر یک رابطه رگرسیونی است که در طول زمان باید پایش شود. در حوزه پایش پروفایل‌های خطی ساده مطالعات گسترده‌ای در ادبیات پایش پروفایل‌ها صورت پذیرفته است که براساس تحقیقات موجود در فاز ۱ و فاز ۲ دسته‌بندی می‌شوند. به‌منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱ رویکردهای گوناگونی مطرح شده‌اند. کنگ و آلباین [۱] که می‌توان گفت پایه‌گذار حوزه پایش پروفایل‌ها در کنترل فرایند آماری هستند، رویکرد  $T^2$  را برای پایش پارامترهای پروفایل و استفاده از نمودارهای کنترل هم‌زمان EWMA-R را برای پایش میانگین و واریانس باقیمانده‌های خط پروفایل مطرح کردند. محمود و وودال [۲] به این نکته اشاره می‌کنند که رویکرد  $T^2$  آن‌ها رویکرد بسیار مناسبی

را به نمودار پیشنهادی خود اضافه کردند. فراهانی و همکاران [۱۳] پایش پروفایل‌های خطی ساده را در حضور داده‌های پرت<sup>۷</sup> بررسی کردند.

در حوزهٔ پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای نیز که در این پژوهش بر آن تمرکز می‌شود، کاظم‌زاده و همکاران [۱۴] سه روش مبتنی بر آمارهٔ LRT، آزمون کلی F و نمودار کنترل  $T^2$  را برای پایش در فاز ۱ پیشنهاد کردند. کاظم‌زاده و همکاران [۱۵] نیز برای پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فاز ۲، استفاده از رویکرد چندجمله‌ای‌های متعامد را مطرح کردند. به‌علاوه، کاظم‌زاده و همکاران [۱۶] اثر وجود خودهمبستگی میان پروفایل‌ها را در پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فاز ۲ بررسی کردند. امیری و همکاران [۱۷] نیز مطالعه‌ای موردی در حوزهٔ پروفایل‌های چندجمله‌ای در صنعت خودروسازی انجام داده‌اند که در آن بر پایش رابطهٔ گشتاور و دور موتور که به‌صورت رگرسیون چندجمله‌ای با درجهٔ دو است، تمرکز شده است.

همچنین، هزینه‌های کیفیتی یکی از اساسی‌ترین مسائلی است که ذهن مدیران را به خود مشغول می‌کند. بی‌شک، تشخیص هرچه سریع‌تر عامل تغییر موجب کاهش هزینه‌های کیفیتی می‌شود. همچنین، تشخیص عامل تغییر بدون آگاهی از زمان واقعی تغییر، نیازمند تجربه و صرف مدت زمان زیادی است. تخمین نقطهٔ تغییر با محدود کردن بازهٔ احتمالی زمان تغییر، علاوه بر کاهش وابستگی تشخیص نقطهٔ تغییر به تجربه، مدت زمان و هزینهٔ تشخیص عامل اثرگذار را نیز کاهش می‌دهد. در نتیجه، می‌توان با تخمین محدودهٔ احتمالی رخ‌دادن تغییر، این هزینه‌ها را کاهش داد. ساموئل و پیگناتیلو [۱۸] از تخمین‌زنندهٔ حداکثر درست‌نمایی به‌منظور برآورد نقطهٔ تغییر پله‌ای در پارامتر فرایند پواسون استفاده کرده‌اند. پیگناتیلو و ساموئل [۱۹] و [۲۰] نیز برآورد نقطهٔ تغییر پله‌ای در میانگین یک فرایند نرمال و نسبت اقلام معیوب در فرایندهای وصفی را با استفاده از رویکرد حداکثر درست‌نمایی مدنظر قرار دادند. پری و پیگناتیلو [۲۱] اقدام به تخمین نقطهٔ تغییر پله‌ای در میانگین یک فرایند نرمال خودهمبسته کرده‌اند. نورالسنا و همکاران [۲۲] نیز روش حداکثر درست‌نمایی را به‌منظور

اقدام به پایش پروفایل خطی ساده در فاز ۱ کرده‌اند. یه و زره‌ساز [۵] پایش پروفایل‌های خطی ساده با تنها یک مشاهده در هر نمونه را در فاز ۱ مدنظر قرار دادند.

پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ نیز مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است؛ برای مثال، کنگ و آلباین [۱] دو رویکرد  $T^2$  و نمودارهای کنترل هم‌زمان EWMA-R خود را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ به‌کار گرفتند. کیم و همکاران [۳] نیز با استفاده از روش تصحیح از میانگین کردن مقادیر متغیر مستقل و در نتیجه مستقل کردن تخمین پارامترهای مدل پروفایل، به‌کارگیری سه نمودار کنترل مجزای EWMA را برای پایش جداگانهٔ شیب، عرض از مبدأ و انحراف استاندارد خط رگرسیون پیشنهاد کرده‌اند. در این روش، هرگاه حداقل یکی از سه نمودار کنترل هشدار خارج از کنترل بودن فرایند را صادر کند، به معنای خروج فرایند از حالت تحت کنترل است. زو و همکاران [۶] نمودار کنترلی مبتنی بر نقطهٔ تغییر را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد کردند. در این روش در حین پایش پروفایل مورد نظر، برآورد پارامترها نیز ممکن است با جمع‌آوری نمونه‌های تحت کنترل جدید، به‌روز شود. زو و همکاران [۷] نمودار کنترل خودآغازشونده<sup>۵</sup> را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده ارائه کردند. سقایی و همکاران [۸] به‌جای سه نمودار کنترل EWMA ارائه‌شده از سوی کیم و همکاران [۳]، از سه نمودار کنترل CUSUM پس از تصحیح از میانگین کردن مقادیر متغیر مستقل استفاده کردند. فاضل‌زندی و علاءالدینی [۹] نیز یک رویکرد مبتنی بر شبکهٔ عصبی مصنوعی فازی را پیشنهاد داده‌اند. محمود و همکاران [۱۰] نیز روشی را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده با تنها دو مشاهده در هر نمونه ارائه کردند. حسینی‌فرد و همکاران [۱۱] سه رویکرد را با استفاده از شبکهٔ عصبی مصنوعی پرسپترون برای پایش پروفایل‌های خطی ساده مطرح کردند. ژنگ و همکاران [۱۲] نیز پایش پروفایل‌های خطی ساده را با تنها یک نمودار کنترل مبتنی بر آماره‌های نسبت درست‌نمایی و EWMA مدنظر قرار دادند. آن‌ها همچنین ویژگی فاصلهٔ نمونه‌گیری متغیر<sup>۶</sup>

$$y_{ij} = \beta_{.j} + \beta_{1j}x_i + \beta_{2j}x_i^2 + \dots + \beta_{kj}x_i^k + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

که در آن  $y_{ij}$  مشاهده سطح  $i$  در نمونه  $j$  ام را نشان می‌دهد.  $\beta_j = (\beta_{.j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{kj})'$  نیز بردار پارامترهای مدل پروفایل در نمونه  $j$  ام است. همچنین، عناصر خطا،  $\varepsilon_{ij}$ ، متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند.

در این پژوهش، پروفایل‌های چندجمله‌ای با درجه ۲ در عمل پرکاربردترند؛ بنابراین، از مدل زیر استفاده می‌شود:

$$y_{ij} = \beta_{.j} + \beta_{1j}x_i + \beta_{2j}x_i^2 + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

مدل فوق را می‌توان به‌طور معادل به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{.j} \\ \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \varepsilon_{2j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nj} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}\beta_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

پژوهش حاضر بر این فرض استوار است که تغییری در واریانس مشاهدات ایجاد نمی‌شود و فقط بردار پارامترهای مدل پروفایل تحت تغییرات یکنوای افزایشی بوده است؛ بنابراین، به‌منظور محاسبه تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی پیش از نقطه نامعلوم تغییر،  $\tau$ ، پارامترهای پروفایل مورد نظر به‌ازای  $j = 1, 2, \dots, \tau$  مقادیر معلوم و تحت کنترل  $\beta = (\beta_{.j}, \beta_{1j}, \beta_{2j})'$  را دارند؛ به‌عبارت دیگر،  $\beta_j = \beta$  برای  $j = 1, 2, \dots, \tau$ . همچنین، فرض می‌شود پس از نقطه نامعلوم تغییر، بردار پارامترهای مدل پروفایل به‌صورت افزایشی تغییر می‌کنند؛ بنابراین،  $\beta_j \geq \beta_{j-1}$ ،  $\beta_{\tau+1} \geq \beta$  برای  $j = \tau + 2, \dots, T$  است.  $T$  نیز زمانی است که در آن رویکرد پایش که در این پژوهش استفاده از نمودار کنترل  $T^2$  است، هشدار خارج از کنترل بودن فرایند را صادر می‌کند.

برآوردکننده حداقل مربعات پارامترهای پروفایل نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\beta}_j = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}_j \quad (4)$$

تابع درست‌نمایی به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

برآورد نقطه تغییر پله‌ای در پارامتر فرایندهای با کیفیت بالا به‌کار گرفتند. نموداران و همکاران [۲۳] نیز نقطه تغییر پله‌ای را در میانگین فرایندهای نرمال چندمتغیره با روش MLE تخمین زدند. پری و پیگناتیلو [۲۴] عملکرد تخمین‌زننده‌های درونی نقطه تغییر در نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM را برای فرایندهای پواسون با عملکرد روش MLE در تخمین نقطه تغییر پله‌ای در پارامتر فرایندهای پواسون مقایسه کردند. نیاکی و خدمتی [۲۵] پژوهشی در زمینه تخمین نقطه تغییر پله‌ای در فرایندهای چندمتغیره بینم انجام دادند.

همچنین، با فرض وجود تغییر تدریجی در پارامترهای فرایند تحقیقاتی در ادبیات نقطه تغییر به روش حداکثر درست‌نمایی صورت پذیرفته است. پری و پیگناتیلو [۲۶] و پری و همکاران [۲۷] به‌ترتیب نقطه تغییر تدریجی در میانگین یک فرایند نرمال و پارامتریک فرایند پواسون را با روش MLE تخمین زدند. همچنین، امیری و خسروی [۲۸] تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی را برای برآورد نقطه تغییر تدریجی در پارامتر فرایندهای با کیفیت بالا پیشنهاد کرده‌اند.

با اینکه برای تخمین نقطه تغییر یکنوا به دانستن نوع تغییر نیاز نیست، باید درمورد جهت تغییرات موجود در فرایند برای ساخت تخمین‌زننده اطلاعاتی از پیش در دست باشد. با فرض وجود تغییرات یکنوای افزایشی، پری و همکاران [۲۹]، نورالسنا و شادمان [۳۰]، امیری و خسروی [۳۱] و نیاکی و خدمتی [۳۲] تخمین‌زننده‌های حداکثر درست‌نمایی نقطه تغییر را به‌ترتیب در نسبت اقلام معیوب، پارامتر فرایند پواسون، میانگین یک فرایند نرمال و پارامتر فرایندهای با کیفیت بالا ارائه دادند.

## ۱. مدل تحت کنترل مفروض و محاسبه

### تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی

مدل تحت کنترل پروفایل‌های چندجمله‌ای درجه  $k$  در فاز ۲ برای نمونه  $j$  ام با فرض ثابت بودن مقادیر متغیر مستقل

$(x)$  و  $n$  مشاهده  $(x_i, x_i^2, \dots, x_i^k, y_{ij})$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

به منظور محاسبه  $\hat{\beta}_{T-\tau}$ ، رویکرد پری و همکاران [۲۹] در نظر گرفته می شود، به طوری که رگرسیون ایزوتونیک به هریک از عناصر بردار پارامترهای مدل برازش داده می شود؛ بنابراین،

$$(\hat{\beta}_u)_{T-\tau} = I[(\hat{\beta}_u)_{T-\tau}], \quad u = 1, 2, \dots, k+1 \quad (10)$$

به منظور برازش مدل رگرسیون ایزوتونیک از الگوریتم تخلف همسایگی مشترک (PAV<sup>A</sup>) که بست و چاکراواری [۳۳] ارائه داده اند، استفاده می شود.

## ۲. رویکرد پایش: نمودار کنترل $T^\tau$ - هتلینگ

در این پژوهش، به منظور پایش پروفایل چندجمله ای مورد نظر در فاز ۲ از نمودار کنترل  $T^\tau$  استفاده می شود. کنگ و آلباین [۱] این نمودار را برای پایش پروفایل های خطی ساده در فاز ۲ پیشنهاد داده اند. آماره نمودار کنترل  $T^\tau$  به صورت رابطه (۱۱) تعریف می شود:

$$T_j^\tau = (\hat{\beta}_j - \beta)' \Sigma_\beta^{-1} (\hat{\beta}_j - \beta) \quad (11)$$

به طوری که در این رابطه برآوردکننده حداقل مربعات ماتریس واریانس-کوواریانس پارامترهای مدل به صورت  $\Sigma_\beta = \sigma^2 (X'X)^{-1}$  است. در فاز ۲، آماره  $T^\tau$  دارای توزیع مربع کای با  $k+1$  درجه آزادی است.  $k+1$  تعداد پارامترهای پروفایل چندجمله ای درجه  $k$  است؛ بنابراین، حد کنترل بالا برای این آماره به صورت زیر است:

$$UCL = \chi_{k+1, \alpha}^2 \quad (12)$$

## ۳. ارزیابی عملکرد تخمین زنده پیشنهادی

### نقطه تغییر یکنوای افزایشی

ارزیابی عملکرد تخمین زنده پیشنهادی با استفاده از ۵۰۰۰ تکرار شبیه سازی مونت کارلو انجام می گیرد. عملکرد تخمین زنده پیشنهادی به ازای تغییرات افزایشی، به صورت تغییر پله ای منفرد و همچنین تغییر پله ای چندگانه ارزیابی می شود. به علاوه، عملکرد آن با عملکرد تخمین زنده نقطه تغییر پله ای که کاظم زاده و همکاران [۳۴] مطرح کرده اند، مقایسه می شود. در هر تکرار شبیه سازی پس از اینکه نمودار کنترل  $T^\tau$  هشدار خارج از کنترل بودن فرایند را

$$L(\tau, (\beta)_{T-\tau} | y, X) = \prod_{j=1}^{\tau} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - x_i \beta)^2} \\ \times \prod_{j=\tau+1}^T \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_{ij} - x_i \beta_j)^2}, \quad (5)$$

محاسبه لگاریتم طبیعی تابع درستنمایی فوق به رابطه زیر منجر می شود:

$$\ln[L(\tau, (\beta)_{T-\tau} | y, X)] = U - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \beta)^2 \\ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=\tau+1}^T \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \beta_j)^2, \quad (6)$$

به طوری که U یک مقدار ثابت است؛ بنابراین، تخمین زنده پیشنهادی نقطه تغییر یکنوای افزایشی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\tau}_{isotonic} = \arg \max_{\tau \leq t \leq T-1} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \beta)^2 \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=t+1}^T \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \hat{\beta}_j)^2 \end{array} \right\}, \quad (7)$$

به منظور محاسبه  $\hat{\tau}_{isotonic}$ ، ابتدا باید مقدار  $\hat{\beta}_j$  را به دست آورد. بدین منظور، برآورد اولیه هریک از عناصر بردار پارامترهای مدل پروفایل به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(\hat{\beta}_j)_u = \begin{cases} (\beta_j)_u & \text{if } (\beta_j)_u \geq \beta_u \\ \beta_u & \text{if } (\beta_j)_u < \beta_u \end{cases}, \quad u = 1, 2, \dots, k+1 \\ j = \tau+1, \tau+2, \dots, T \quad (8)$$

به طوری که اندیس u عنصر u ام بردار مورد نظر را نشان می دهد. بدین صورت، بردار  $\hat{\beta}_j$  از طریق حل برنامه ریزی محدب زیر حاصل می شود:

$$\text{Maximize}_{\beta_{T-\tau}} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \beta)^2 \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=t+1}^T \sum_{i=1}^n (y_{ij} - x_i \hat{\beta}_j)^2 \end{array} \right\} \\ \text{subject to } \hat{\beta}_j \geq \hat{\beta}_{j-1}, \quad j = \tau+1, \dots, T \quad (9)$$

پله‌ای منفرد با در نظر گرفتن نقطه تغییر  $\tau = 10$  در پارامترهای مدل به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$\beta_j = \beta + q \quad (14)$$

به طوری که  $q$  یک بردار هم‌بعد با بردار  $\beta$  است و عناصر آن میزان تغییر پله‌ای در عنصر متناظر در بردار  $\beta$  را نشان می‌دهند. همچنین، دو تغییر پله‌ای افزایشی با در نظر گرفتن  $\tau_1 = 10$  و  $\tau_2 = 20$  به صورت زیر هستند:

$$\beta_j = \beta + q_1, \quad j = 1, 12, \dots, 20$$

$$\beta_j = \beta + q_2, \quad j = 21, \dots, T \quad (15)$$

$q_1$  و  $q_2$  نیز بردارهایی هم‌بعد با بردار  $\beta$  هستند و عناصر آن میزان تغییرات پله‌ای اول و دوم در بردار پارامترهای مدل را نشان می‌دهند.

نتایج شبیه‌سازی‌ها به‌ازای تغییرات افزایشی در پارامترهای مدل پروفایل چندجمله‌ای مورد نظر در جدول‌های ۱ تا ۴ خلاصه شده‌اند. جدول‌های ۱ و ۳ صحت عملکرد تخمین‌زننده پیشنهادی را به ترتیب به‌ازای تغییرات پله‌ای منفرد و دو تغییر پله‌ای افزایشی در پارامترهای پروفایل مورد نظر نشان می‌دهند. در این جدول‌ها، میانگین مربعات خطای تخمین‌ها داخل پرانتز گزارش شده‌اند. جدول‌های ۲ و ۴ نیز دقت تخمین‌زننده پیشنهادی را به ترتیب به‌ازای تغییرات پله‌ای منفرد و دو تغییر پله‌ای افزایشی در پارامترهای پروفایل مورد نظر نشان می‌دهند.

صادر کند، تخمین‌زننده پیشنهادی و تخمین‌زننده نقطه تغییر پله‌ای برای تخمین نقطه تغییر استفاده می‌شود. برای انجام دادن شبیه‌سازی‌ها نمونه دهم اولین نقطه تغییر در نظر گرفته شده است؛ بنابراین، باید ۱۰ نمونه اول در هر تکرار تحت کنترل باشد. بدین منظور، به دلیل اینکه نمودار کنترل جزء نمودارهای نوع شوهرات است و آماره‌ها در هر نمونه کاملاً مستقل از نمونه‌های دیگر هستند، نحوه برخورد با هشدارهای اشتباه قبل از نمونه دهم بدین صورت است که اگر نمونه‌ای خارج از کنترل باشد، آن نمونه حذف می‌شود و نمونه دیگری جایگزین آن می‌شود. این کار آنقدر ادامه می‌یابد تا تمام ده نمونه اول کاملاً تحت کنترل باشند. مدل پروفایل تحت کنترل مورد استفاده در این پژوهش عبارت است از:

$$y_{ij} = 3 + 2x + x^2 + \varepsilon_{ij} \quad (13)$$

در نتیجه، بردار  $\beta = (3 \quad 2 \quad 1)'$  است. همچنین، فرض

می‌شود عناصر خطا،  $\varepsilon_{ij}$ ، دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک هستند. مقادیر متغیر مستقل،  $x$ ، نیز ثابت و متساوی‌الفاصله هستند و برابر با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ هستند که در ابتدا به منظور کاهش اثر هم‌خطی چندگانه، میانگین مقادیر  $x$  از آن‌ها کم شده است و به مقادیر  $-4/5$ ،  $-3/5$ ،  $-2/5$ ،  $-1/5$ ،  $0/5$ ،  $1/5$ ،  $2/5$ ،  $3/5$ ،  $4/5$  تبدیل شده‌اند. همچنین، فرض می‌شود تغییری در انحراف معیار فرایند رخ نمی‌دهد. تغییر

جدول ۱. صحت تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی و نقطه تغییر پله‌ای برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ به‌ازای تغییر پله‌ای منفرد در پارامترهای مدل.  $\tau = 10$  و  $N = 5000$ .

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/4 \\ 0/025 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/5 \\ 0/025 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/6 \\ 0/025 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/6 \\ 0/05 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/7 \\ 0/075 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0/15 \\ 0 \end{bmatrix}$
ARL	30/592	17/3432	10/0124	9/542	5/5772	1/7952
$\bar{\tau}_{isotonic}$	12/0434 (45/3118)	9/85 (8/522)	9/3202 (4/9994)	9/1462 (5/1534)	8/8794 (4/7142)	8/7014 (4/8846)
$\bar{\tau}_{step}$	10/8308 (18/1568)	10/4206 (9/2482)	10/2484 (4/392)	10/192 (3/8676)	10/1198 (2/5774)	10/1048 (1/2004)

جدول ۲. دقت تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی و نقطه تغییر پله‌ای برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ به‌ازای تغییر پله‌ای منفرد در پارامترهای مدل.  $\tau = 10$  و  $N = 5000$ .

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_r \\ q_\tau \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . / . 4 \\ . / . 25 \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . / . 5 \\ . / . 25 \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . / . 6 \\ . / . 25 \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . / . 6 \\ . / . 5 \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . / . 7 \\ . / . 75 \\ . \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ . / . 15 \\ . \end{bmatrix}$
	$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 0)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۲۴۱۸ ۰/۳۵۲۴	۰/۳۳۶۲ ۰/۴۶۸۴	۰/۳۹۶۶ ۰/۵۲۷۲	۰/۳۷۴۶ ۰/۵۵۷	۰/۳۹۸۴ ۰/۶۳۸۶
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 1)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۴۸۸۲ ۰/۵۸۵۴	۰/۶۲۳۴ ۰/۷۰۵۲	۰/۶۸۶۶ ۰/۷۷۷۴	۰/۶۷۷ ۰/۷۹۹۴	۰/۶۹۵۲ ۰/۸۴۷	۰/۶۹۶۶ ۰/۹۰۵۴
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 3)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۷۱۴۴ ۰/۷۹۵	۰/۸۵۱۴ ۰/۸۷۷۸	۰/۹۰۱۲ ۰/۹۲۵۸	۰/۸۹۴۴ ۰/۹۳۵۶	۰/۸۹۹۲ ۰/۹۵۲۲	۰/۸۹۸۸ ۰/۹۸۳۲
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 5)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۸۱۸۶ ۰/۸۹۳۴	۰/۹۳۵۲ ۰/۹۴۵	۰/۹۶۳۴ ۰/۹۶۸۶	۰/۹۵۸۴ ۰/۹۷۴۴	۰/۹۶۱۴ ۰/۹۸	۰/۹۶۰۶ ۰/۹۹۴۴
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 7)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۸۷۶۲ ۰/۹۴۱	۰/۹۶۵۴ ۰/۹۷۰۶	۰/۹۸۱۸ ۰/۹۸۱۶	۰/۹۸۴۲ ۰/۹۸۶۴	۰/۹۸۷۲ ۰/۹۹۲۲	۰/۹۸۳۴ ۰/۹۹۶
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 10)$ یکنوای افزایشی پله‌ای	۰/۹۲۳۲ ۰/۹۷۸۶	۰/۹۹۰۸ ۰/۹۹۲۴	۰/۹۹۹۴ ۰/۹۹۵۸	۰/۹۹۹۶ ۰/۹۹۶۶	۱ ۰/۹۹۸۸	۱ ۱

جدول ۳. صحت تخمین‌زننده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی و نقطه تغییر پله‌ای برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ به‌ازای دو تغییر پله‌ای در پارامترهای مدل.  $\tau_1 = 10$ ،  $\tau_2 = 20$  و  $N = 5000$ .

$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_r \\ q_\tau \end{bmatrix}$ $\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_r \\ q_\tau \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{q}_r = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_r \\ q_\tau \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / . 75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} . \\ . \\ . / 2 \end{bmatrix}$
ARL	۳۴/۷۸۷۴	۲۳/۵۲۹۶	۱۳/۷۲۲۲	۱۱/۷۵۹۸	۱۱	۱۱
$\bar{\hat{\tau}}_{isotonic}$	۱۷/۹۱۴۲ (۱۰۳/۴۴۴۶)	۱۴/۹۹۳۴ (۴۸/۷۰۲۶)	۱۱/۰۷۲۴ (۱۴/۰۸۳۲)	۹/۱۷۸ (۳/۳۳۰۴)	۹/۰۲۳ (۳/۶۶۵۴)	۸/۹۸۰۲ (۳/۶۹۴۶)
$\bar{\hat{\tau}}_{step}$	۱۵/۳۹۷۸ (۶۶/۸۳۲۶)	۱۴/۴۹۶۶ (۴۹/۱۰۱۴)	۱۱/۹۶۱۲ (۲۲/۵۴۶۸)	۱۰/۰۶۹۶ (۲/۳۶۷۶)	۹/۹۶۵۸ (۰/۲۷۴۲)	۱۵/۵۰۶۴ (۵۵/۱۹۳۶)

جدول ۴. دقت تخمین‌زنده حداکثر درست‌نمایی پیشنهادی و نقطه تغییر پله‌ای برای پروفایل چندجمله‌ای درجه ۲ به‌ازای دو تغییر پله‌ای در

پارامترهای مدل.  $\tau_1 = 10$ ،  $\tau_2 = 20$  و  $N = 5000$ .

$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$	$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
		$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  = 0)$	یکنوای افزایشی	۰/۰۵۳۶	۰/۱۰۲۲	۰/۲۷۸۲	۰/۵۰۴۶	۰/۵۳۶۸	۰/۵۴۳۶
	پله‌ای	۰/۱۰۲۴	۰/۱۳۷	۰/۳۴۱	۰/۷۳۷۴	۰/۸۶۳	۰/۴۳۷۶
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 1)$	یکنوای افزایشی	۰/۱۲۷۴	۰/۲۲۴	۰/۵۲۷۴	۰/۷۷۰۲	۰/۷۶۹۴	۰/۷۶۵۲
	پله‌ای	۰/۲۱۰۶	۰/۲۸۱۶	۰/۵۴۰۸	۰/۹۱۳۶	۰/۹۷۳۲	۰/۴۴۷۲
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 3)$	یکنوای افزایشی	۰/۲۳۴۸	۰/۳۸۰۲	۰/۷۴۱۴	۰/۹۲۷۶	۰/۹۲۴۸	۰/۹۱۷۸
	پله‌ای	۰/۳۶۴۴	۰/۴۳۶۴	۰/۷۱۱	۰/۹۷۴۴	۰/۹۹۷۸	۰/۴۴۸۲
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 5)$	یکنوای افزایشی	۰/۳۳۲۸	۰/۵۰۷۸	۰/۸۴۱۸	۰/۹۷۶۲	۰/۹۶۶۶	۰/۹۷۱۲
	پله‌ای	۰/۴۷۳۲	۰/۵۵۴	۰/۷۸۷۶	۰/۹۸۵۴	۰/۹۹۹۸	۰/۴۴۸۲
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 7)$	یکنوای افزایشی	۰/۴۴۰۲	۰/۶۳۴۶	۰/۹۰۹۲	۰/۹۹۲۲	۰/۹۸۹۴	۰/۹۸۹۶
	پله‌ای	۰/۵۷۲۴	۰/۶۵۰۲	۰/۸۴۴۶	۰/۹۸۸	۱	۰/۴۴۸۲
$\hat{p}( \hat{\tau} - \tau  \leq 10)$	یکنوای افزایشی	۰/۷۳۲	۰/۹۰۴۴	۰/۹۹۶	۱	۱	۱
	پله‌ای	۰/۸۲۲۶	۰/۸۸۷	۰/۹۴۱۶	۰/۹۸۸۶	۱	۱

در فرایند ندارد و تنها فرضش این است که جهت تغییرات به‌صورت افزایشی است.

نتایج جدول‌های ۳ و ۴ نیز نشان می‌دهد تحت دو تغییر پله‌ای افزایشی، تخمین‌زنده پیشنهادی عملکرد مطلوبی از نظر صحت و دقت تخمین‌ها دارد. هنگامی که میزان تغییرات خیلی کوچک باشد، با اینکه تخمین‌زنده پیشنهادی عملکرد مناسبی دارد، تخمین‌زنده نقطه تغییر پله‌ای کمی بهتر عمل می‌کند. برتری تخمین‌زنده پیشنهادی علاوه‌بر عملکرد مناسب آن، در حذف نیاز به آگاهی درمورد نوع تغییر است و تنها فرض آن افزایشی بودن جهت تغییرات است.

نتایج جدول‌های ۱ و ۲ بیان می‌کنند تحت تغییر پله‌ای منفرد افزایشی، از آنجا که  $\hat{\tau}_{isotonic}$  به نقطه واقعی تغییر ( $\tau = 10$ ) نزدیک است، تخمین‌زنده پیشنهادی عملکرد مطلوبی از نظر صحت تخمین‌ها دارد. همچنین، دقت تخمین‌ها عملکرد مناسب رویکرد پیشنهادی را آشکار می‌کند. البته زمانی که میزان تغییرات پله‌ای منفرد خیلی کوچک یا خیلی بزرگ باشد، علی‌رغم عملکرد قابل‌قبول تخمین‌زنده پیشنهادی، تخمین‌زنده نقطه تغییر پله‌ای کمی بهتر عمل می‌کند. این موضوع کاملاً بدیهی است، زیرا تخمین‌زنده نقطه تغییر پله‌ای با فرض وجود تغییر پله‌ای در پارامترهای فرایند محاسبه شده است، ولی تخمین‌زنده پیشنهادی این مزیت را دارد که نیازی به دانستن نوع تغییر

## نتیجه‌گیری

هم مقایسه شدند. مقایسات نشان دادند در برخی موارد در تغییرات خیلی کوچک، با وجود عملکرد مناسب تخمین‌زنده پیشنهادی، تخمین‌زنده نقطه تغییر پله‌ای کمی بهتر عمل می‌کند. شایان ذکر است تخمین‌زنده پیشنهادی این مزیت را دارد که بدون نیاز به دانستن نوع تغییر قابل استفاده است و تنها فرض آن افزایشی بودن جهت تغییرات است.

در این پژوهش، تخمین‌زنده نقطه تغییر یکنوای افزایشی در پارامترهای مدل پروفایل چندجمله‌ای با استفاده از رویکرد حداکثر درست‌نمایی پیشنهاد شد. عملکرد تخمین‌زنده پیشنهادی به‌ازای تغییرات افزایشی با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شد. نتایج ارزیابی‌ها عملکرد مناسب تخمین‌زنده پیشنهادی را نشان دادند. به‌علاوه، عملکرد تخمین‌زنده پیشنهادی و تخمین‌زنده نقطه تغییر پله‌ای با

## مراجع

1. Kang, L. and Albin, S. (2000). "On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 4, PP. 418–426.
2. Mahmoud, M. A. and Woodall, W. H. (2004). "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications", *Technometrics*, Vol. 46, No. 4, PP. 380–391.
3. Kim, K., Mahmoud, M. A., and Woodall, W. H. (2003). "On the monitoring of linear profiles", *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, No. 3, PP. 317-328.
4. Mahmoud, M. A., Parker, P. A., Hawkins, M. D. and Woodall, W. H. (2007). "A change point method for linear profile data", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 2, PP. 247–268.
5. Yeh, A. and Zerehsaz, Y. (2013). "Phase I control of simple linear profiles with individual observations", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 29, No. 6, PP. 829-840.
6. Zou, C., Zhang, Y. and Wang, Z. (2006). "Control chart based on change-point model for monitoring linear profiles", *IIE Transactions*, Vol. 38, No. 12, PP. 1093–1110.
7. Zou, C., Zhou, C., Wang, Z. and Tsung, F. (2007). "A self-starting control charts for linear profiles", *Journal of Quality Technology*, Vol. 39, No. 4, PP. 364–375.
8. Saghaei, A., Mehrjoo, M. and Amiri, A. (2009). "A CUSUM-based method for monitoring simple linear profiles", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 45, No. 11-12, PP. 1252-1260.
9. Zarandi, M. F. and Alaeddini, A. (2010). "Using adaptive nero-fuzzy systems to monitor linear quality profiles", *Journal of Uncertain Systems*, Vol. 4, No. 2, PP. 147-160.
10. Mahmoud, M. A., Morgan, J. P. and Woodall, W. H. (2010). "The monitoring of simple linear regression profiles with two observations per sample", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 37, No. 8, PP. 1249–1263.
11. Hosseinifard, S. Z., Abdollahian, M. and Zeepongsekul, P. (2011). "Application of artificial neural networks in linear profile monitoring", *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, No. 5, PP. 4920–4928.
12. Zhang, J., Li, Z. and Wang, Z. (2009). "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 53, No. 4, PP. 1440-1448.
13. Farahani, E., Noorossana, R. and Koosha, M. (2014). "Profile monitoring in the presence of outliers", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 74, No. 1-4, PP. 251-256.
14. Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R. and Amiri, A. (2008). "Phase I monitoring of polynomial profiles", *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Vol. 37, No. 10, PP. 1671–1686.
15. Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R. and Amiri, A. (2009). "Monitoring polynomial profiles in quality control applications", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 42, No. 7-8, PP. 703-712.
16. Kazemzadeh, R. B. and Amiri, A. (2010). "Phase II monitoring of autocorrelated polynomial profiles in AR (1) processes", *Scientia Iranica*, Vol. 17, No. 1, PP. 12-24.
17. Amiri, A., Jensen, W. A. and Kazemzadeh, R. B. (2010). "A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 26, No. 5, PP. 509-520.
18. Samuel, T. R. and Pignatiello, J. J. (1998). "Identifying the time of a change in a poisson rate parameter", *Quality Engineering*, Vol. 10, No. 4, PP. 673-681.



19. Pignatiello Jr, J. J., and Samuel, T. R. (2001). "Estimation of the change point of a normal process mean in SPC applications", *Journal of Quality technology*, Vol. 33, No. 1, PP. 82– 95.
20. Pignatiello Jr, J. J. and Samuel, T. R. (2001). "Identifying the time of a step change in the process fraction nonconforming", *Quality Engineering*, Vol. 13, No. 3, PP. 357- 365.
21. Perry, M. B., and Pignatiello Jr, J. J. (2010). "Identifying the time of step change in the mean of autocorrelated processes", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 37, No. 1, PP. 119- 136.
22. Noorossana, R., Saghaei, A., Paynabar, K. and Abdi, S. (2009). "Identifying the period of a step change in high-yield processes", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, No. 7, PP. 875-883.
23. Nedumaran, G., Pignatiello Jr, J. J. and Calvin, J. A. (2000). "Identifying the time of a step-change with x2 control charts", *Quality Engineering*, Vol. 13, No. 2, PP. 153- 159.
24. Perry, M. B. and Pignatiello Jr, J. J. (2011). "Estimating the time of step change with Poisson CUSUM and EWMA control charts", *International Journal of Production Research*, Vol. 49, No. 10, 2857- 2871.
25. Niaki, S. T. A. and Khedmati, M. (2014). "Step change-point estimation of multivariate binomial processes", *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 31, No. 5, PP. 566- 587.
26. Perry, M. B. and Pignatiello Jr, J. J. (2006). "Estimation of the change point of a normal process mean with a linear trend disturbance in SPC", *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 3, No. 3, PP. 325- 334.
27. Perry, M. B., Pignatiello Jr, J. J. and Simpson J. R. (2006). "Estimating the change point of a poisson rate parameter with a linear trend disturbance", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 22, No. 4, PP. 371- 384.
28. Amiri, A. and Khosravi, R. (2012). "Estimating the change point of the cumulative count of a conforming control chart under a drift", *Scientia Iranica*, Vol. 19, No. 3, PP. 856- 861.
29. Perry, M. B., Pignatiello Jr, J. J. and Simpson, J. R. (2007). "Estimating the change point of the process fraction non-conforming with a monotonic change disturbance in SPC", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 3, PP. 327- 339.
30. Noorossana, R. and Shadman, A. (2009). "Estimating the change point of a normal process mean with a monotonic change", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 25, No. 1, PP.79- 90.
31. Amiri, A. and Khosravi, R. (2013). "Identifying time of a monotonic change in the fraction nonconforming of a high-quality process", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 68, No. 1- 4, PP. 547- 555.
32. Niaki, S. T. A. and Khedmati, M. (2014). "Monotonic change-point estimation of multivariate Poisson processes using a multi-attribute control chart and MLE", *International Journal of Production Research*, Vol. 52, No. 10, PP. 2954- 2982.
33. Best, M. J. and Chakravarti, N. (1990). "Active set algorithms for isotonic regression; a unifying framework", *Mathematical Programming*, Vol. 47, No. 1- 3, PP. 425– 439.
34. Kazemzadeh, R. B., Noorossana, R. and Ayoubi, M. (2015). "Change point estimation of multivariate linear profiles under linear drift", *Communication in Statistics-Simulation & Computation*, Vol. 44, No. 6, PP. 1570- 1599.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Polynomial Profile
2. Maximum Likelihood Estimation
3. Change Point Estimation
4. Isotonic Change
5. Self-starting Control Chart
6. Variable Sampling Interval- VSI
7. Outliers
8. Pooled Adjacent Violator- PAV