

# ارائه رویکردی یکپارچه برای کنترل موجودی، قیمت گذاری و تبلیغات محصولات زوال پذیر

مسعود ربانی<sup>۱\*</sup>، نادیا پورمحمدضیا<sup>۲</sup>، حامد رفیعی<sup>۳</sup>

۱. استاد دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده های فنی دانشگاه تهران

۲. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه امیرکبیر

۳. دکتری مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، پردیس دانشکده های فنی دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۹۴/۱۱/۰۵، تاریخ در یافت روایت اصلاح شده: ۹۴/۱۱/۱۵، تاریخ تصویب: ۹۴/۱۲/۰۵)

## چکیده

در این پژوهش، به دنبال ارائه رویکردی نوین برای بهینه سازی همزمان تصمیم های کنترل موجودی، قیمت گذاری و تبلیغات محصولات زوال پذیر در یک زنجیره تأمین سه سطحی هستیم. تقاضای مشتری، تابعی از قیمت فروش و عامل تبلیغات است. در این پژوهش، عامل تبلیغات که نقشی کلیدی در افزایش میزان تقاضای مشتری دارد، به صورت توأثر تبلیغات در هر دوره مدل سازی شده است. برای افزایش ماهیت کاربردی مسئله، از یک سو به اثر قیمت کالاهای جایگزین محصول بر تقاضا توجه شده و از سوی دیگر، نرخ هزینه نگهداری به صورت وابسته به زمان تعریف شده است که برای محصولات در معرض زوال، مطابقت بیشتری با واقعیت دارد. به منظور حل مدل ارائه شده، ابتدا با توسعه روش های متعدد، وجود پاسخ بهینه و منحصر به فرد برای مسئله اثبات شد. سپس با استفاده از این نتایج نظری، الگوریتم حلی با رویکرد تکراری توسعه یافت. در پایان برای نمایش اعتبار مدل پیشنهادی و کارایی روش حل توسعه یافته، نتایج عددی به همراه تحلیل حساسیت پارامترهای مهم مسئله ارائه شدند.

**واژه های کلیدی:** تبلیغات، زوال موجودی، قیمت گذاری، کنترل موجودی.

## مقدمه

و برای برخی از محصولات، این فرایند سریع تر از حد معمول پیش می رود. این محصولات، در اصطلاح زوال پذیر نامیده می شوند. بدیهی است کنترل موجودی این محصولات، به دلیل هزینه های تحمیل شده به سیستم در اثر از بین رفتن بخشی از موجودی، از اهمیت ویژه ای برخوردار است [۲].

برای کاهش اثر منفی زوال، به طور معمول تمایل به افزایش نرخ مصرف موجودی وجود دارد. از طرفی، تقاضای این دسته از محصولات، به شکل مستقیم به قیمت و کیفیت آن ها وابسته است؛ بنابراین، توازن میان تصمیم های قیمت گذاری و مسائل کنترل موجودی اهمیت ویژه ای دارد و یکسوسازی این دو، با ایجاد هماهنگی میان عرضه و تقاضا، موجب بهبود فعالیت های زنجیره تأمین بنگاه های اقتصادی و تولیدی می شود.

پژوهش های دانشگاهی، در این زمینه از غنای بالایی

امروزه سازمان ها در محیطی پویا و به شدت رقابتی مشغول به فعالیت هستند. در چنین محیطی، تأمین رضایت مشتری، شرط اساسی بقا و موفقیت به شمار می آید. فضای حاکم، بنگاه های تجاری را بر آن داشته است که فعالیت های خود را از چارچوب سنتی خارج کنند [۱]. در دیدگاه کلاسیک، قیمت، فقط ابزاری برای درآمدزایی بود؛ در حالی که امروزه علاوه بر درآمدزایی، نقشی کلیدی در تأمین رضایت مشتری ایفا می کند؛ به طوری که هماهنگی و یکسوسازی تصمیم های قیمت گذاری و فاکتورهای وابسته به تولید و مدیریت موجودی، از اهمیت ویژه ای برخوردارند. در مدل سازی بیشتر مسائل کنترل موجودی، طول عمر نامحدود محصولات به عنوان فرضی غیر صریح مدنظر قرار می گیرد؛ حال آنکه بیشتر محصولات، با گذر زمان ارزش تجاری خود را از دست می دهند و غیر قابل استفاده می شوند

برخوردارند. مطالعه در این زمینه از سال ۱۹۵۵ با ارائهٔ مدل ویتین [۳] آغاز شده است و تاکنون ادامه دارد. اتخاذ تصمیم‌های قیمت‌گذاری و کنترل موجودی، شاخه‌ای از مسائل مدیریت درآمد است که نخستین بار به‌وسیلهٔ ایلون و مالایا [۴] با تعیین طول عمر معین برای محصول به‌جای نرخ زوال موجودی مطرح شد و امروزه توجه پژوهشگران زیادی را در ادبیات مدیریت موجودی، اقتصاد، بازاریابی و تحقیق در عملیات به خود جلب کرده است.

کوهن [۵] اولین مدل را با تقاضای وابسته به قیمت و نرخ زوال ثابت ارائه کرد. اگرچه این مدل فرضیه‌های بسیار ساده‌ای را در نظر گرفته بود، مبنایی برای بسیاری از پژوهش‌های آتی در این زمینه شد. آباد [۶] یکی از مطالعات برجسته در قیمت‌گذاری و کنترل موجودی یکپارچهٔ محصولات زوال‌پذیر را در حالت تولید اقتصادی و کمبود پس‌افت جزئی ارائه کرد که به‌وسیلهٔ یانگ [۶] در حالت مدل سفارش اقتصادی بررسی شد.

تی‌ساو و شین [۷] در شمار معدود مطالعاتی از قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات زوال‌پذیر قرار می‌گیرند که اثر عامل تبلیغات را در تابع تقاضا مدنظر قرار داده‌اند. شاه و همکاران [۸] نیز به وابستگی تقاضا به تبلیغات توجه کرده‌اند. در این مطالعه، نرخ هزینهٔ نگهداری به شکل وابسته به زمان تعریف شده است.

شوندی و همکاران [۹] به بهینه‌سازی هم‌زمان تصمیم‌های قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات فاسدشدنی - که به سه دستهٔ مستقل، مکمل و جایگزین تقسیم می‌شوند - پرداخته‌اند. تقاضای محصول، علاوه‌بر قیمت فروش، وابسته به قیمت فروش کالاهای مکمل و جایگزین آن محصول در نظر گرفته شده است.

گیری و باردهان [۱۰] یک مدل موجودی تک‌دوره‌ای با تقاضای وابسته به قیمت و سطح انبارش موجودی در یک زنجیرهٔ تأمین دوسطحی ارائه کردند. در مدل سونی [۱۱] وابستگی تقاضا به قیمت و سطح انبارش در شرایطی که امکان پرداخت معوقه از جانب فروشنده فراهم شده باشد، مطالعه شد. سونی و جوشی [۱۲] با افزودن فرض پرداخت معوقهٔ دوسطحی، به بررسی سیاست‌های بهینهٔ قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات زوال‌پذیر پرداختند.

خیائو و خو [۱۳] یک مدل بازی استکلبرگ برای بهینه‌سازی هم‌زمان تصمیم‌های قیمت‌گذاری و سطح خدمت ارائه دادند. سونی و پاتل [۱۴] به بررسی سیاست بهینهٔ قیمت‌گذاری و کنترل موجودی محصولات زوال‌پذیر با الگوی زوال غیرآنی و امکان پرداخت معوقه پرداختند. سونی و پاتل [۱۵] با تعریف زمان آغاز زوال موجودی، به شکل غیرقطعی و محدودیت اعتبار، مدل پیشین را گسترش دادند. به الگوی زوال غیرآنی موجودی، در مطالعات دیگری نظیر قریشی و همکاران [۱۶] و میهمی و نخعی‌کمال‌آبادی [۱۷] و [۱۸] نیز توجه شد. تیموری و کاظمی [۱۹] مدلی برای قیمت‌گذاری کالاهای زوال‌پذیر با نرخ زوال ثابت و جایگزینی کالاهای فاسدشده به شکل آنی ارائه دادند. طالعی‌زاده و بابایی [۲۰] دو مدل برای تصمیم‌های موجودی و قیمت‌گذاری کالاهای مکمل با و بدون فرض فسادپذیری کالا معرفی کردند. در این مطالعه، تابع تقاضا وابسته به قیمت کالا و کالای جایگزین فرض شده است.

تیموری و کاظمی [۲۱] مدلی برای قیمت‌گذاری کالاهای زوال‌پذیر با نرخ زوال ثابت و در نظر گرفتن جایگزینی کالاهای فاسد شده در یک زنجیرهٔ تأمین سه سطحی ارائه کردند. طالعی‌زاده و بابایی [۲۲] نیز در مطالعه‌ای نسبتاً مشابه، مدلی برای تصمیمات قیمت‌گذاری و موجودی کالاهای مکمل در حضور زوال توسعه دادند.

بررسی مطالعات موجود نشان می‌دهد که علی‌رغم غنای بالای ادبیات مسئله، برخی شکاف‌های تحقیقاتی در چارچوب موضوع به چشم می‌خورند. علی‌رغم اثر کلیدی تبلیغات در افزایش میزان تقاضا، به این عامل تنها در دو پژوهش توجه شده است. از سوی دیگر، اثر کالاهای وابسته در فرایند قیمت‌گذاری چندان بررسی نشده است. در نهایت، با اینکه در مسائل حقیقی، عمدتاً هزینهٔ نگهداری طی زمان و برای کاهش سرعت زوال موجودی افزایش پیدا می‌کند، تنها یک پژوهش نرخ هزینهٔ نگهداری به شکل وابسته به زمان تعریف شده است.

با توجه به اهمیت مسئله و شکاف‌های موجود در ادبیات موضوع، در این پژوهش به دنبال بهینه‌سازی هم‌زمان سیاست کنترل موجودی و تصمیم‌های بازاریابی شامل

هزینه نگهداری هر واحد موجودی در واحد زمان؛	$h(t)$	قیمت‌گذاری و تبلیغات در حضور عامل زوال هستیم. تقاضای مشتری، به شکل تابعی از قیمت فروش و عامل تبلیغات تعریف شده است. عامل تبلیغات - که نقشی کلیدی در افزایش میزان تقاضای مشتری دارد - به صورت تواتر تبلیغات در هر دوره مدل‌سازی شده است که از ویژگی‌های برجسته این پژوهش به‌شمار می‌آید. برای افزایش ماهیت کاربردی مسئله، از طرفی به اثر قیمت کالاهای جایگزین محصول بر تقاضا توجه شده و از سوی دیگر، نرخ هزینه نگهداری به صورت وابسته به زمان تعریف شده است که برای محصولات در معرض زوال، مطابقت بیشتری با واقعیت دارد. در نهایت، نرخ زوال به صورت وابسته به زمان تعریف شده است که در مقایسه با نرخ زوال ثابت، ساختار واقع‌بینانه‌تری به مدل می‌بخشد.
هزینه هر بار سفارش‌دهی؛	$k$	
هزینه هر بار تبلیغات؛	$G$	
نرخ زوال موجودی در لحظه زمانی $t$ ؛	$\theta(t)$	
قیمت فروش کالای جایگزین محصول	$p_s$	
متغیرها؛		
تواتر تبلیغات در هر دوره؛	$A$	
قیمت فروش محصول؛	$p$	
طول دوره بازپرسی سیستم موجودی؛	$T$	
سطح موجودی در لحظه زمانی $t$ ؛	$I(t)$	
حجم سفارش‌دهی؛	$Q$	
هزینه کل سفارش‌دهی؛	$OC$	
هزینه کل نگهداری؛	$HC$	
هزینه کل خرید؛	$PC$	
هزینه کل تبلیغات؛	$AC$	
سود کل سیستم موجودی در واحد زمان.	$TP(p, A, T)$	

### چارچوب مدل پیشنهادی

#### مفروضات

۱. افق زمانی و نرخ بازنگری موجودی نامحدودند.
۲. زمان تحویل سفارش صفر است.
۳. کمبود در سیستم مجاز نیست.
۴. تقاضای مشتری تابع قیمت فروش و تواتر تبلیغات است. به علاوه اثر قیمت کالاهای جایگزین نیز بر تابع تقاضا لحاظ شده است. تابع تقاضا به شکل  $D(p, A) = (MB + \gamma_s p_s - \omega p)(1 + A)^2$  تعریف می‌شود که  $MB$  تقاضای بالقوه مشتری در شرایطی است که قیمت فروش صفر باشد. پارامتر  $\omega > 0$  نشانگر حساسیت تقاضا نسبت به قیمت فروش و پارامتر  $\gamma_s > 0$  نشانگر حساسیت تابع تقاضا نسبت به قیمت فروش کالاهای جایگزین است. پارامتر  $0 \leq \lambda < 1$  نیز مربوط به شکل تبلیغات است.
۵. نرخ زوال موجودی به صورت  $\theta(t) = \alpha t$  تعریف می‌شود و  $\alpha \leq 1$ .

#### مدل‌سازی

سیستم موجودی به شکل مقابل ساختار یافته است:  $Q$  واحد محصول، در آغاز هر دوره وارد سیستم موجودی می‌شوند. زوال موجودی بلافاصله پس از ورود محصول به سیستم آغاز می‌شود؛ بنابراین، کاهش سطح موجودی در بازه زمانی  $[0, T]$  در اثر دو عامل تأمین تقاضا و پدیده زوال رخ می‌دهد. براین اساس، تغییرات سطح موجودی در بازه زمانی  $[0, T]$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(p, A) - \theta(t)I(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

با استفاده از شرایط کرانی  $I(T) = 0$ ، حل معادله ۱ به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$I(t) = e^{-\alpha t^2} \int_t^T D(p(u), A) e^{\alpha u^2} du \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

بنابراین، حجم سفارش‌دهی برابر با رابطه ۳ خواهد بود:

#### متغیرها و پارامترها

پارامترها

$c$  هزینه ثابت خرید هر واحد محصول؛

بدین‌منظور، ابتدا برای مقادیر معین  $P$  و  $T$  مشتق مرتبهٔ دوم تابع  $TP(p, A, T)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial A^2} = \frac{\lambda(\lambda-1)(1+A)^{\lambda-2}}{T} (MB + \gamma_s p_s - \omega p) \times [pT - \int_0^T h(t)e^{-\alpha t^2} \int_t^T e^{\alpha u^2} du dt - c \int_0^T e^{\alpha u^2} du] \quad (10)$$

از آنجا که  $\lambda < 1$  نتیجه می‌گیریم  $\frac{\partial^2 TP}{\partial A^2} < 0$ ؛ بنابراین،  $TP(p, A, T)$  تابعی مقعر از متغیر  $A$  است و برای یافتن پاسخ بهینهٔ تواتر تبلیغات در هر دوره، کافی است یک پاسخ بهینهٔ محلی از این متغیر به‌دست آوریم. در این مرحله لازم است لم‌های مورد نیاز برای یافتن پاسخ بهینه و منحصربه‌فرد طول دورهٔ بازنگری سیستم موجودی ( $T^*$ ) و قیمت فروش ( $p^*$ ) را توسعه دهیم. **لم ۱:** برای مقادیر ثابت  $A$  و معین  $P$  مقدار منحصربه‌فردی مانند  $T^*$  وجود دارد که  $TP(p, A, T)$  را بیشینه کند.

**اثبات:** مشتق جزئی مرتبهٔ اول  $TP(p, A, T)$  نسبت به  $T$  برابر است با:

$$\frac{\partial TP(p, A, T)}{\partial T} = \frac{(Expression 1)T - Expression 2}{T^2} \quad (11)$$

که

$$Expression 1 = (MB + \gamma_s p_s - \omega p)(1+A)^{\lambda} \times [p - e^{\alpha T^2} \int_0^T h(t)e^{-\alpha t^2} dt - ce^{\alpha T^2}] \quad (12)$$

$$Expression 2 = (MB + \gamma_s p_s - \omega p)(1+A)^{\lambda} \times [pT - \int_0^T h(t)e^{-\alpha t^2} \int_t^T e^{\alpha u^2} du dt - c \int_0^T e^{\alpha u^2} du] \quad (13)$$

با توجه به رابطهٔ ۱۱، تابع کمکی  $R(T)$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R(T) = (Expression 1)T - Expression 2 \quad (14)$$

مشتق مرتبهٔ اول  $R(T)$  برابر است با:

$$\frac{dR(T)}{dT} = (MB + \gamma_s p_s - \omega p)(1+A)^{\lambda} \times [-(1+2\alpha T e^{\alpha T^2} \int_0^T h(t)e^{-\alpha t^2} dt) - 2\alpha T e^{\alpha T^2}] \quad (15)$$

$\frac{dR(T)}{dT} < 0$ ؛ بنابراین،  $R(T)$  تابعی کاملاً نزولی

$$Q = I(0) = \int_0^T D(p(u), A) e^{\alpha u^2} du \quad (3)$$

در این مرحله می‌توان درآمد و هزینه‌های سیستم موجودی را محاسبه کرد. سود کل سیستم موجودی در واحد زمان، از مؤلفه‌های زیر تشکیل شده است:

۱. درآمد سیستم موجودی

$$SR = \int_0^T p D(p, A) dt = p D(p, A)T \quad (4)$$

۲. هزینهٔ سفارش‌دهی

$$OC = k \quad (5)$$

۳. هزینهٔ نگهداری موجودی

$$HC = \int_0^T h(t)I(t)dt \quad (6)$$

$$= \int_0^T h(t)e^{-\alpha t^2} \int_t^T D(p, A) e^{\alpha u^2} du dt$$

۴. هزینهٔ خرید

$$PC = cQ = c \left( \int_0^T D(p, A) e^{\alpha u^2} du \right) \quad (7)$$

۵. هزینهٔ تبلیغات

$$AC = GA \quad (8)$$

با توجه به عبارتهای درآمد و هزینه‌های سیستم موجودی، سود کل سیستم در واحد زمان ( $TP(p, A, T)$ ) به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$TP(p, A, T) = \frac{1}{T} (SR - OC - HC - PC - AC) \quad (9)$$

## رویکرد حل

به‌دلیل پیچیدگی معادلات ارائه‌شده، اثبات تقعر تابع هدف با استفاده از ماتریس هشین ممکن نیست؛ بنابراین، از رویکرد جست‌وجویی که در مطالعات [۸]، [۲۳] و [۲۴] نیز استفاده شده است، بهره می‌گیریم. بدین‌منظور، ابتدا لازم است اثبات کنیم به ازای مقادیر معین  $P$  و  $T$  پاسخ بهینهٔ منحصربه‌فردی برای  $A$  وجود دارد. سپس برای مقادیر ثابت  $A$  و معین  $P$ ، مقدار بهینه و منحصربه‌فرد  $T$  به‌دست می‌آید. درنهایت، اثبات می‌شود که به ازای مقادیر ثابت  $A$  و معین  $T$ ، مقدار بهینه و منحصربه‌فردی برای  $P$  وجود دارد که سود کل سیستم موجودی در واحد زمان را بیشینه می‌کند.

با توجه به اینکه  $\left. \frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} \right|_{p=p^*} < 0$  پاسخ بهینه  $P^*$

مطلق به ازای مقادیر ثابت  $A$  و معین  $T$  برای  $TP(p, A, T)$  است، براساس نتایج نظری حاصل می توان ادعا کرد به ازای مقدار ثابت  $A$ ، پاسخ بهینه منحصر به فردی برای  $(T, p)$  وجود دارد که مقدار  $TP(p, A, T)$  را بیشینه می کند. پاسخ بهینه با استفاده از الگوریتم حلی با رویکرد مکرر به دست می آید و گام های آن به شرح زیر است:

### الگوریتم حل

**گام ۱:**  $A = 0$  را در نظر بگیرید.

**گام ۲:**  $k = 1$  و مقدار اولیه قیمت فروش را برابر  $P^k = c$  در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial TP(p, A, T)}{\partial T} = 0$$

**گام ۳:** مقدار  $T^k$  را با حل معادله

به دست آورید. با جای گذاری این مقدار در معادله (۱۹) مقدار  $P^k$  را به دست آورید و  $P^{k+1} = P^k$  را در نظر بگیرید.

**گام ۴:** اگر  $|P^{k+1} - P^k| < 10^{-4}$  باشد،

$(p, T) = (P^{(k+1)}, T^k)$  و به گام ۵ بروید. در غیر این صورت،  $k = k + 1$  در نظر بگیرید و به گام ۳ بازگردید.

**گام ۵:**  $TP(p, A, T)$  را محاسبه کنید. پاسخ  $(p, T)$

بهینه و  $TP(p, A, T)$  مقدار بیشینه تابع هدف به ازای مقدار ثابت  $A$  است.

**گام ۶:**  $A' = A + 1$  را در نظر بگیرید و گام های ۲ تا ۵

را برای محاسبه  $TP(p, A', T)$  تکرار کنید.

**گام ۷:** اگر  $TP(p, A', T) > TP(p, A, T)$ ،  $A = A'$

و به گام ۶ بازگردید. در غیر این صورت به گام ۸ بروید.

**گام ۸:**  $(p^*, A^*, T^*) = (p, A', T)$  پاسخ بهینه مسئله

است.

**گام ۹:** پایان.

### نتایج عددی

برای نمایش اعتبار مدل ارائه شده و کارایی روش حل

است. از آنجا که  $R(0) > 0$  و  $R(\infty) < 0$ ، با استفاده از قضیه مقدار میانی اثبات می شود که مقدار منحصر به فردی مانند  $T^*$  وجود دارد که  $R(T^*) = 0$ . با توجه به معادلات ۱۱ و ۱۴ داریم:

$$\frac{\partial TP(p, A, T)}{\partial T} = \frac{R(T)}{T^2} \quad (16)$$

در نتیجه، پاسخ منحصر به فردی برای  $\frac{\partial TP(p, A, T)}{\partial T} = 0$  است.

در نقطه  $T = T^*$  داریم:

$$\left. \frac{\partial^2 TP(p, A, T)}{\partial T^2} \right|_{T=T^*} = \frac{(MB + \gamma_s p_s - \omega p)(1 + A)^2}{T} \quad (17)$$

$$\times [-(1 + 2\alpha T e^{\alpha T^2} \int_0^T h(t) e^{-\alpha t^2} dt) - 2\alpha c T e^{\alpha T^2}] < 0$$

بنابراین،  $T^*$  پاسخ بهینه مطلق برای  $TP(p, A, T)$  است.

**لم ۲:** به ازای مقادیر ثابت  $A$  و معین  $T$  مقدار بهینه و منحصر به فردی برای  $P$  وجود دارد که سود کل سیستم موجودی در واحد زمان را بیشینه می کند.

**اثبات:** مشتق جزئی مرتبه اول  $TP(p, A, T)$  نسبت به  $P$  برابر است با:

$$\frac{\partial TP}{\partial p} = (1 + A)^2 \left\{ -\omega \left[ pT - \int_0^T h(t) e^{-\alpha t^2} \int_t^T e^{\alpha u^2} du dt \right] - c \int_0^T e^{\alpha u^2} du \right\} + T(MB + \gamma_s p_s - \omega p) \quad (18)$$

با حل  $\frac{\partial TP}{\partial p} = 0$  مقدار  $P^*$  به شکل زیر به دست می آید:

$$P^* = \left[ \frac{\omega \int_0^T h(t) e^{-\alpha t^2} \int_t^T e^{\alpha u^2} du dt}{-c \omega \int_0^T e^{\alpha u^2} du + T(MB + \gamma_s p_s)} \right] / \omega(1 + T) \quad (19)$$

در نقطه  $p = P^*$  داریم:

$$\left. \frac{\partial^2 TP}{\partial p^2} \right|_{p=P^*} = -\omega(1 + A)^2(1 + T) \quad (20)$$

جدول ۱. مقادیر پارامترهای مورد استفاده

مقدار	پارامتر
۴۰۰۰	$MB$
۲۰۰	$\omega$
۷۵	$\gamma_s$
۵	$p_s$
۲۵۰	$k$
۸۰	$G$
۰/۲	$\psi$
۳	$c$
۰/۰۸	$\alpha$
۰/۰۳	$\lambda$

توسعه‌یافته، در این بخش به ارائه نتایج عددی می‌پردازیم. تابع نرخ هزینه نگهداری موجودی در پژوهش شاه و همکاران [۸] به صورت زیر تعریف شده است:

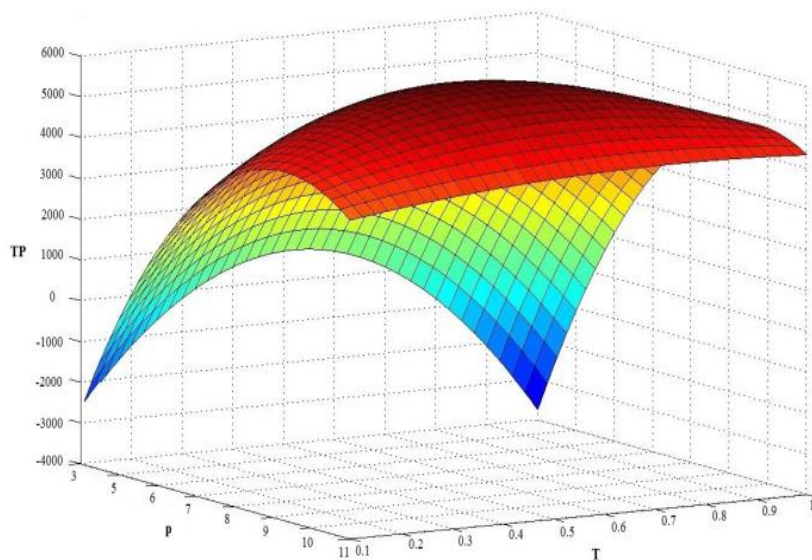
$$h(t) = \begin{cases} c_h & t \leq t_d \\ c_h + \psi(t - t_d) & t \geq t_d \end{cases} \quad (21)$$

مقادیر پارامترهای مورد استفاده در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. پارامترهای مشترک مسئله برابر مطالعه شاه و همکاران [۸] است. جدول ۲ رویه حل الگوریتم ارائه شده را برای حصول پاسخ بهینه نمایش می‌دهد. تقعر تابع هدف نسبت به متغیرهای  $(T, p)$  و به ازای مقدار ثابت  $A$  در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

برای نمایش اثر عامل زوال موجودی، تبلیغات و هزینه نگهداری موجودی، نتایج عددی مسئله به ازای مقادیر مختلف  $\alpha, \lambda$  و  $\psi$  در جدول‌های ۳، ۴ و ۵ ارائه شده‌اند.

جدول ۲. رویه حل الگوریتم توسعه یافته

$TP$	$Q$	$T$	$p$	$A$
۴۸۲۲/۱۷	۱۱۴۴/۲۶۳	۰/۳۶۹۷	۴/۷۹۴۶	0
۴۹۰۳/۳۵	۱۲۴۶/۰۹۳	۰/۳۹۴۴	۴/۸۲۰۳	1
۴۹۹۲/۰۲	۱۳۱۲/۵۸۶	۰/۴۱۰۹	۴/۸۵۲۹	2
۱۱/۵۰۷۸	۱۴۲۶/۶۷۸	۰/۴۴۳۱	۴/۸۹۳۱	3
۵۱۶۱/۰۹	۱۵۱۸/۲۰۲	۰/۴۷۲۳	۴/۹۲۵۴	4
۵۰۸۴/۵۶	۱۶۱۸/۸۲۲	۰/۴۹۷۵	۴/۹۶۶۷	5

شکل ۱. تقعر تابع هدف نسبت به  $(T, p)$  به ازای مقدار ثابت  $A$

در هر دوره ( $A^*$ )، قیمت فروش ( $P^*$ ) و سود کل سیستم موجودی در واحد زمان ( $TP$ ) می‌شود. با افزایش پارامتر شکل تبلیغات ( $\lambda$ ) تواتر تبلیغات در هر دوره افزایش پیدا می‌کند که این خود به افزایش میزان تقاضا و سود کل سیستم موجودی در واحد زمان می‌انجامد.

با توجه به نتایج عددی فوق، برآیندهای مدیریتی زیر در زمینه عوامل تبلیغات، زوال موجودی و هزینه نگهداری به دست می‌آید که مطابق با نتایج شاه و همکاران [۸] است. ۱. به ازای مقادیر ثابت  $\psi$  و  $\alpha$  افزایش  $\lambda$  موجب افزایش مقادیر بهینه طول دوره بازسازی سیستم موجودی ( $T^*$ )، حجم سفارش‌دهی ( $Q^*$ )، تواتر تبلیغات

جدول ۳. نتایج عددی به ازای مقادیر  $\alpha = 0.08$  و مختلف  $\lambda$  و  $\psi$ 

$TP$	$Q$	$T$	$P$	$A$	$\psi$	$\lambda$	$\alpha$
۵۱۶۱/۰۹	۱۵۱۸/۲۰۲	۰/۴۷۲۳	۴/۹۲۵۴	۴	۰/۲	۰/۰۳	۰/۰۸
۵۱۵۰/۷۸	۱۴۳۹/۵۲۵	۰/۴۴۹۴	۴/۹۲۵	۴	۰/۴		
۵۱۳۲/۰۱	۱۳۹۰/۷۷۴	۰/۴۳۵۲	۴/۹۲۴۶	۴	۰/۶		
۵۱۱۴/۳۶	۱۳۳۶/۰۵۷	۰/۴۱۹۱	۴/۹۲۴۱	۴	۰/۸		
۵۲۵۸/۷۵	۱۷۱۵/۰۹۱	۰/۵۱۵۱	۴/۹۴۱۶	۷	۰/۲	۰/۰۴	۰/۰۸
۵۲۴۴/۰۹	۱۶۵۷/۰۰۱	۰/۴۹۸۸	۴/۹۴۱۱	۷	۰/۴		
۵۲۱۶/۷۸	۱۵۸۲/۹۰۳	۰/۴۷۸۱	۴/۹۴۰۸	۷	۰/۶		
۵۲۰۴/۶۱	۱۵۱۰/۱۴۵	۰/۴۶۶۶	۴/۹۴۰۵	۷	۰/۸		
۶۹/۵۳۵۰	۱۹۷۳/۰۷۷	۰/۴۶۷۲	۴/۹۷۳۳	۹	۰/۲	۰/۰۵	۰/۰۸
۵۳۴۲/۱۱	۱۸۷۰/۶۲۲	۰/۵۴۱۱	۴/۹۷۲۶	۹	۰/۴		
۵۳۱۳/۷۸	۱۸۰۸/۶۰۹	۰/۵۲۳۴	۴/۹۷۲۲	۹	۰/۶		
۵۲۹۱/۶۶	۱۷۵۱/۴۲۶	۰/۵۰۸۱	۴/۹۷۱۷	۹	۰/۸		

جدول ۴. نتایج عددی به ازای مقادیر  $\alpha = 0.1$  و مختلف  $\lambda$  و  $\psi$ 

$TP$	$Q$	$T$	$P$	$A$	$\psi$	$\lambda$	$\alpha$
۵۱۳۰/۱۲	۱۵۱۵/۴۹۶	۰/۴۷۰۱	۴/۹۴۰۱	۴	۰/۲	۰/۰۳	۰/۰۸
۵۱۱۹/۸۷	۱۴۳۷/۰۰۵	۰/۴۴۷۲	۴/۹۳۹۷	۴	۰/۴		
۵۱۰۱/۲۲	۱۳۸۸/۳۳۹	۰/۴۳۳۱	۴/۹۳۹۴	۴	۰/۶		
۵۰۸۳/۶۷	۱۳۳۳/۷۱۸	۰/۴۱۷۱	۴/۹۳۸۸	۴	۰/۸		
۵۲۲۷/۲۲	۱۷۱۲/۰۸۸	۰/۵۱۲۴	۴/۹۵۶۴	۷	۰/۲	۰/۰۴	۰/۰۸
۵۲۱۲/۶۳	۱۶۵۴/۱۰۳	۰/۴۹۶۳	۴/۹۵۵۹	۷	۰/۴		
۵۱۸۵/۴۸	۱۵۸۰/۱۳۲	۰/۴۷۵۶	۴/۹۵۵۶	۷	۰/۶		
۵۱۷۳/۳۸	۱۵۳۱/۳۵۸	۰/۴۶۴۳	۴/۹۵۵۲	۷	۰/۸		
۵۳۱۸/۵۸	۱۹۶۹/۶۲۳	۰/۵۶۴۴	۴/۹۸۸۱	۹	۰/۲	۰/۰۵	۰/۰۸
۵۳۱۰/۰۴	۱۸۶۷/۳۴۷	۰/۵۳۷۲	۴/۹۸۷۵	۹	۰/۴		
۵۲۸۱/۸۹	۱۸۰۵/۴۴۲	۰/۵۲۰۷	۴/۹۸۷۱	۹	۰/۶		
۵۲۵۹/۹۱	۱۷۴۸/۳۶۱	۰/۵۰۵۴	۴/۹۸۶۶	۹	۰/۸		

جدول ۵. نتایج عددی به ازای مقادیر  $\alpha = 0.12$  و مختلف  $\lambda$  و  $\psi$ 

$TP$	$Q$	$T$	$P$	$A$	$\psi$	$\lambda$	$\alpha$
۵۰۹۹/۳۴	۱۵۱۱/۶۸۷	۰/۴۶۷۶	۴/۹۵۵	۴	۰/۲	۰/۰۳	
۵۰۸۹/۲۱	۱۴۳۳/۳۸۱	۰/۴۴۴۹	۴/۹۵۴۶	۴	۰/۴		
۵۰۷۰/۶۱	۱۳۸۴/۸۳۸	۰/۴۳۰۸	۴/۹۵۴۲	۴	۰/۶		
۵۰۵۳/۱۷	۱۳۳۰/۳۵۵	۰/۴۱۴۹	۴/۹۵۳۷	۴	۰/۸		
۵۱۹۵/۸۳	۱۷۰۷/۷۷۱	۰/۵۱۰۱	۴/۹۷۱۳	۷	۰/۲	۰/۰۴	
۵۱۸۱/۳۶	۱۶۴۹/۹۲۹	۰/۴۹۳۸	۴/۹۷۰۸	۷	۰/۴		۰/۱۲
۵۱۵۴/۳۷	۱۵۷۶/۱۴۷	۰/۴۶۳۲	۴/۹۷۰۵	۷	۰/۶		
۵۱۴۲/۳۴	۱۵۱۴/۴۴۴	۰/۴۶۲۱	۴/۹۷۰۱	۷	۰/۸		
۵۲۸۶/۶۷	۱۹۶۴/۶۵۶	۰/۵۶۱۵	۵/۰۰۳۲	۹	۰/۲	۰/۰۵	
۵۲۷۸/۱۸	۱۸۶۲/۶۳۸	۰/۵۳۴۶	۵/۰۰۲۵	۹	۰/۴		
۵۲۵۰/۲۲	۱۸۰۰/۸۹۰	۰/۵۱۸۱	۵/۰۰۲۲	۹	۰/۶		
۵۲۲۸/۳۶	۱۷۴۳/۹۵۱	۰/۵۰۲۸	۵/۰۰۱۶	۹	۰/۸		

این در حالی است که قیمت فروش ( $P^*$ ) در اثر بالارفتن میزان  $\alpha$  افزایش می‌یابد و مقدار تواتر تبلیغات در هر دوره ( $A^*$ ) ثابت باقی می‌ماند.

جدول ۶ اثر تغییرات قیمت کالای جایگزین را بر متغیرهای مسئله نمایش می‌دهد.

مطابق نتایج عددی، افزایش  $P_s$  موجب بالارفتن مقادیر بهینه طول دوره بازپرسازی سیستم موجودی ( $T^*$ )، حجم سفارش‌دهی ( $Q^*$ )، قیمت فروش ( $P^*$ ) و سود کل سیستم موجودی در واحد زمان ( $TP$ ) می‌شود.

۲. به ازای مقادیر ثابت  $\lambda$  و  $\alpha$  با افزایش مقدار  $\psi$ ، مقادیر بهینه طول دوره بازپرسازی سیستم موجودی ( $T^*$ )، حجم سفارش‌دهی ( $Q^*$ )، قیمت فروش ( $P^*$ ) و سود کل سیستم موجودی در واحد زمان ( $TP$ ) کاهش می‌یابد. این بدان معناست که فروشنده در جهت کاهش هزینه نگهداری خود، حجم سفارش‌ها را کاهش می‌دهد تا سطح متوسط موجودی نیز کاهش بیابد. تواتر تبلیغات ( $A^*$ ) مستقل از تغییرات است.

۳. افزایش  $\alpha$  به ازای مقادیر ثابت سایر پارامترها، موجب کاهش مقادیر بهینه حجم سفارش‌دهی ( $Q^*$ ) و سود کل سیستم موجودی در واحد زمان ( $TP$ ) می‌شود.

جدول ۶. نتایج عددی مسئله به ازای تغییرات  $P_s$ 

$TP$	$Q$	$T$	$P$	$A$	$P_s$
۴۱۷۷/۰۵	۱۱۵۴/۷۰۲	۰/۴۲۰۷	۴/۳۰۲۱	۴	۳
۴۶۷۲/۹۲	۱۳۸۸/۰۴۴	۰/۴۴۲۱	۴/۶۱۰۲	۴	۴
۵۱۶۱/۰۹	۱۵۱۸/۲۰۲	۰/۴۷۲۳	۴/۹۲۵۴	۴	۵
۵۶۰۸/۱۲	۱۷۰۲/۱۳۲	۰/۵۰۱۹	۵/۲۲۳۷	۴	۶
۶۰۷۲/۱۷	۱۸۹۷/۰۶۶	۰/۵۳۰۶	۵/۵۴۰۲	۴	۷



## نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ساختاری نوین برای اتخاذ تصمیم‌های بازاریابی و کنترل موجودی محصولات زوال‌پذیر ارائه شد. توجه به وابستگی تابع تقاضا به عامل تبلیغات و قیمت فروش کالاهای جایگزین، و مدل‌سازی نرخ هزینه نگهداری موجودی به شکل تابعی عمومی از زمان، از ویژگی‌های برجسته این مطالعه به‌شمار می‌آید. نتایج عددی حاصل، اعتبار و کارایی ساختار ارائه‌شده را اثبات کرد. همچنین

برآیندهای مدیریتی حاصل از این نتایج عددی، بر نقش کلیدی تبلیغات در افزایش سطح تقاضا و تأثیر نامطلوب زوال موجودی بر سیستم تأکید دارد. پژوهش حاضر را می‌توان با افزودن فرض کمبود در سیستم موجودی، توجه به ارزش زمانی پول و الگوی زوال غیرآنی موجودی ادامه داد.

## مراجع

- Nasiri, M. M. and Pourmohammad Zia, N. (2015). "A hybrid model for supplier selection and order allocation in supply chain", *Journal of international engineering*, Vol. 49, No. 1, PP. 117–128.
- Panda, S., Saha, S. and Basu, M. (2013). "Optimal pricing and lot-sizing for perishable inventory with price and time dependent ramp-type demand", *International Journal of Systems sciences*, Vol. 44, No. 1, PP. 127–138.
- Whitin, T. M. (1955). "Inventory control and price theory", *Management sciences*, Vol. 2, No. 1, PP. 61–68.
- Eilon, S. and Mallaya, R. V. (1966). "Issuing and pricing policy of semi-perishables", *Proceedings of 4<sup>th</sup> International conference on operational research*, New York, USA, PP. 205–215.
- Cohen, M. A. (1977). "Joint pricing and ordering policy for exponentially decaying inventory with known demand", *Naval research logistic quarterly*, Vol. 24, No. 2, PP. 257–268.
- Abad, P. L. (2003). "Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability, finite production and partial backordering and lost sale", *European journal of operations research*, Vol. 144, No. 3, PP. 677–685.
- Tsao, Y. C. and Sheen, G. J. (2008). "Dynamic pricing, promotion and replenishment policies for a deteriorating item under permissible delay in payments", *Computers & operations research*, Vol. 35, No. 11, PP. 3562–3580.
- Shah, N. H., Soni, H. N. and Patel, K. A. (2013). "Optimizing inventory and marketing policy for non-instantaneous deteriorating items with generalized type deterioration and holding cost rates", *Omega*, Vol. 41, No. 2, PP. 421–430.
- Shavandi, H., Mahlooji, H. and Nosrati, N.E. (2012). "A constrained multi-product pricing and inventory control problem", *Applied soft computing*, Vol. 12, No. 8, PP. 2454–2461.
- Giri, B. C. and Bardhan, S. (2012). "Supply chain coordination for a deteriorating item with stock and price dependent demand under revenue sharing contract", *International transaction on operations research*, Vol. 19, No. 5, PP. 753–768.
- Soni, H. N. (2013). "Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with price and stock sensitive demand under permissible delay in payment", *International journal of production economics*, Vol. 146, No. 1, PP. 259–268.
- Soni, H. N. and Joshi, M. (2013). "A fuzzy framework for coordinating pricing and inventory policies for deteriorating items under retailer partial trade credit financing", *Computers & industrial engineering*, Vol. 66, No. 4, PP. 865–878.
- Xiao, T., and Xu, T. (2013). "Coordinating price and service level decisions for a supply chain with deteriorating item under vendor managed inventory", *International journal of production economics*, Vol. 145, No. 2, PP. 743–752.
- Soni, H. and Patel, K. (2012). "Optimal pricing and inventory policies for non-instantaneous deteriorating items with permissible delay in payment: Fuzzy expected value model", *International journal of industrial engineering computation*, Vol. 3, No. 3, PP. 281–300.
- Soni, H. and Patel, K. (2013). "Joint pricing and replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with imprecise deterioration free time and credibility constraint", *Computers & industrial engineering*, Vol. 66, No. 4, PP. 944–951.

16. Ghoreishi, M., Mirzazadeh, A. and Weber, G. W. (2013). "Optimal pricing and ordering policy for non-instantaneous deteriorating items under inflation and customer returns", *Optimization*, (ahead-of-print), PP. 1–20.
  17. Maihami, R. and Nakhai Kamalabadi, I. (2012). "Joint pricing and inventory control for non-instantaneous deteriorating items with partial backlogging and time and price dependent demand", *International journal of production economics*, Vol. 136, No. 1, PP. 116–122.
  18. Maihami, R. and Nakhai Kamalabadi, I. (2012). "Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging", *Mathematical computation modelling*, Vol. 55, No. 5, PP. 1722–1733.
  19. Teimouri, E. and Kazemi, M. M. (2015). "Development of pricing model for deteriorating items with constant deterioration rate considering replacement", *Journal of international engineering*, Vol. 49, No. 1, PP. 1–9.
  20. Taleizadeh, A. A. and Babaei, M. (2015). "Pricing and inventory decisions of deteriorating complementary products", *Journal of international engineering*, Vol. 48, No. 1, PP. 83–94.
  21. Wu, K. S., Ouyang, L. Y. and Yang, C. T. (2009). "Coordinating replenishment and pricing policies for non-instantaneous deteriorating items with price-sensitive demand", *International Journal of Systems sciences*, Vol. 40, No. 12, PP. 1273–1281.
  22. Qin, Y., Wang, J. and Wei, C. (2014). "Joint pricing and inventory control for fresh produce and foods with quality and physical quantity deteriorating simultaneously", *International journal of production economics*, Vol. 152, PP. 42–48.
-