

# مدل‌سازی ریاضی و ارائه روش حل برای مسئله هاب سلسله‌مراتبی با در نظر گرفتن مسیریابی در پایین‌ترین سطح

مهدی بشیری<sup>۱\*</sup>، محمدرضا یعقوبی<sup>۲</sup>

۱. استاد دانشکده فنی و مهندسی گروه صنایع، دانشگاه شاهد

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

(تاریخ دریافت: ۹۴/۰۵/۱۲، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده: ۹۵/۱۰/۰۸، تاریخ تصویب: ۹۶/۰۲/۲۰)

## چکیده

در مسئله هاب سلسله‌مراتبی-مسیریابی مورد مطالعه، شبکه‌ای شامل سه سطح (مشتریان، هاب غیرمرکزی و هاب مرکزی) با هدف یافتن مکان بهینه استقرار هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی، تخصیص مشتریان به هاب‌های غیرمرکزی و همچنین پیدا کردن مسیر بهینه بین مشتریان و هاب غیرمرکزی، در نظر گرفته شده است. از جمله کاربردهای این مدل می‌توان به سیستم ارسال مراسلات پست، بانک‌ها، شبکه‌های دریافت و ارسال و... اشاره کرد. در این مطالعه، یک مدل ریاضی عدد صحیح مختلط ارائه شده و برای حل آن در اندازه متوسط، از الگوریتم تجزیه بندرز استفاده شده است. با توجه به NP-hard بودن مسئله، برای حل در اندازه بزرگ، از الگوریتم زنبورعسل مصنوعی استفاده شد. الگوریتم مصنوعی زنبورعسل، در مسائل پیوسته کاربرد دارد، اما در این پژوهش، با انجام دادن تغییراتی در الگوریتم، برای حل مدل گسسته پیشنهادی به کار گرفته شد. نتایج بیانگر عملکرد مناسب الگوریتم‌های تجزیه بندرز و زنبورعسل مصنوعی، به ترتیب برای حل مدل در اندازه متوسط (۲۵ نقطه) و اندازه بزرگ (۸۰ نقطه) است.

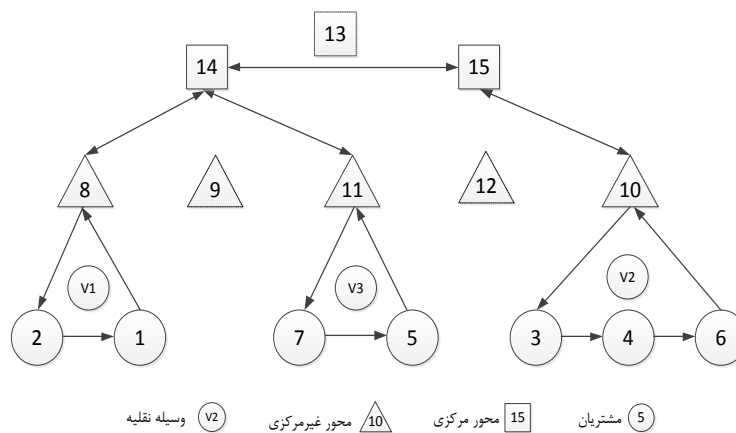
**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم تجزیه بندرز، الگوریتم مصنوعی زنبورعسل، مسیریابی، مکان‌یابی هاب، هاب سلسله‌مراتبی.

## مقدمه

بارگیری می‌شوند تا به مراکز اصلی ارسال (هاب مرکزی) فرستاده شوند. برای مدل‌سازی چنین مسائلی لازم است از حالت سلسله‌مراتبی استفاده شود. به علاوه، اگر قرار باشد در سطح پایین، تمامی مشتریان به صورت مستقیم به هاب غیرمرکزی متصل شوند، هزینه مسیر در این حالت بسیار بالا خواهد بود؛ چراکه لازم است برای هر مشتری، یک وسیله مجزا ارسال شود، به همین دلیل بهتر است برای کاهش هزینه‌های حمل و نقل، مشتریان تخصیص یافته به یک هاب غیرمرکزی با یک وسیله، خدمت‌دهی شوند که در این صورت لازم است مسیریابی بین آن‌ها صورت گیرد. از میان کاربردهای این مدل می‌توان به سیستم ارسال مراسلات پست، بانک‌ها، شبکه‌های دریافت و ارسال و... اشاره کرد.

شکل ۱ شامل ۷ نقطه تقاضا و ۵ نقطه بالقوه برای احداث هاب غیرمرکزی و ۳ نقطه بالقوه برای احداث هاب مرکزی است. همچنین مسیریابی بین نقاط متصل به یک هاب غیرمرکزی نشان داده شده است.

مکان‌یابی هاب، یکی از مسائل شناخته‌شده حوزه مکان‌یابی است که در آن، به دنبال یافتن مکان استقرار هاب‌ها و تخصیص مشتریان به هاب‌ها هستیم، به گونه‌ای که هزینه‌های استقرار و جابه‌جایی حداقل شود. یکی از انواع مسائل هاب سلسله‌مراتبی است که هدف آن، طراحی یک شبکه هاب چندسطحی است؛ به طوری که بالاترین سطح آن، شبکه ارتباطی کاملی بین هاب‌های مرکزی تشکیل می‌دهد و نوع خدمات هاب‌های سطح بالا کامل‌تر و مرتبط با سطوح پایین‌تر است. در مسئله هاب کلاسیک، هر محموله در حرکت از مبدأ تا مقصد از دو هاب عبور می‌کند، اما در برخی موارد لازم است پیش از رسیدن به مقصد، عملیات آماده‌سازی، بارگذاری، بارگیری، مرتب‌سازی و... انجام شود؛ برای مثال، می‌توان به ارسال محموله با پست اشاره کرد. در این حالت مشتریان محموله خود را به صندوق پست می‌اندازند و پس از رسیدن به مراکز پستی (هاب غیرمرکزی)، محموله‌ها بارگذاری، مرتب‌سازی و دوباره



شکل ۱. نمایش یک جواب مدل هاب سلسله‌مراتبی-مسیریابی

هاب‌های مرکزی شناخته می‌شوند. سطوح بعدی از شبکه-ای ستاره‌ای تشکیل شده است. این شبکه سایر هاب‌ها را به هاب‌های مرکزی و نقاط تقاضا را به نقاط هاب متصل می‌کند. هدف از این مسئله، تعیین مکان هاب مرکزی و تعیین مکان سایر هاب‌هاست که تعداد آن از قبل مشخص است؛ به نحوی که هزینه کل انتقالات در شبکه کمینه شود. در واقع، این حالت سبب کاهش هزینه‌های احداث می‌شود، زیرا هر مرکز، متناسب با نیازمندی‌های نقاط تقاضا ساخته می‌شود و نه با همه امکانات (مانند کلینیک و بیمارستان).

در مسئله هاب سلسله‌مراتبی، ابتدا یو هنگ چو [۵] مدل هاب سلسله‌مراتبی را برای شبکه حمل‌ونقل هوایی پیشنهاد کرد و روشی ابتکاری براساس الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه برای حل مدل خود ارائه داد. بعد از آن، چنگ چانگ لی [۶] با ارائه یک مدل صفر و یک، در کنار تأمین سطح مورد نظر سرویس، هزینه‌های عملیاتی کل را به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفت و از روش شمارشی برای حل مدل خود استفاده کرد. در ادامه، یامان [۷] برای مسئله هاب سلسله‌مراتبی، یک مدل غیرخطی صفر و یک، به‌همراه یک مدل مختلط عدد صحیح به‌صورت تک‌تخصیصه معرفی کرد. کرانی و صحرائیان [۸] هاب پوششی را وارد حوزه سلسله‌مراتبی کردند. در این شبکه، هاب‌های مرکزی که سطح اول را تشکیل می‌دهند، یک شبکه کامل دارند. ارتباط هاب‌های سطح دوم به‌صورت شبکه ستاره‌ای است و از یک روش ابتکاری برای حل مدل استفاده شده است. سیبیل آلومور و همکاران [۹] به

در ادامه مقاله، ابتدا مرور ادبیات تحقیق و پس از آن، مدل‌سازی و تحلیل حساسیت ارائه می‌شود. سپس الگوریتم تجزیه بندرز و الگوریتم فراابتکاری زنبور عسل مصنوعی، معرفی و نتایج آن‌ها ارائه می‌شود و در انتها نتیجه‌گیری صورت می‌گیرد.

## مرور ادبیات

مکان‌یابی هاب، مسئله‌ای شناخته‌شده در طبقه‌بندی مسائل مکان‌یابی است. تاکنون چندین مقاله مروری به طبقه‌بندی مسائل هاب، روش‌های حل، کاربردها و... پرداخته‌اند و از آن جمله می‌توان به آلومور و کارا [۱] و زنجیرانی فراهانی و همکاران [۲] اشاره کرد.

در مسئله مکان‌یابی تسهیلات به‌صورت سلسله‌مراتبی، هدف مشخص کردن مکان تسهیلات در سطوح مختلف، اختصاص نقاط تقاضا به آن‌ها و کاهش هزینه‌های استقرار و حمل‌ونقل است. از کاربردهای این مسئله می‌توان به سیستم‌های درمانی و آموزشی، شبکه‌های توزیع، سیستم پستی و بانکی و... اشاره کرد. همچنین در این زمینه، مقالات مروری به بررسی انواع مختلف این مدل، روش‌های حل و کاربردهای آن پرداخته‌اند که مطالعات ساهین و سورال [۳] و زنجیرانی فراهانی و همکاران [۴] از جمله آن‌ها هستند.

مسئله هاب سلسله‌مراتبی<sup>۱</sup> (H.H) به‌معنای طراحی یک شبکه هاب چندسطحی است؛ به‌طوری‌که بالاترین سطح آن، یک شبکه ارتباطی کامل را تشکیل می‌دهد که با نام

مدل هاب سلسله‌مراتبی استفاده کردند که در آن، نقاط تقاضا احتیاجات خود را از تمامی هاب‌ها دریافت می‌کنند. کاربرد این مدل، تأمین اینترنت کاربران از طریق هاب‌ها عنوان شده است. به همین دلیل است که هر نقطه تقاضا به تمامی هاب‌ها متصل است و از شبیه‌سازی برای حل آن بهره گرفته شده است.

جدول ۱، خلاصه‌ای از مطالعات انجام‌شده در حوزه هاب سلسله‌مراتبی را نشان می‌دهد.

مدل‌سازی مسئله هاب سلسله‌مراتبی با محدودیت زمان ارسال کالا پرداختند. آنان کاربرد مدل خود را در صنعت حمل‌ونقل هوایی ترکیه نشان دادند و برای حل آن، از روش شاخه و کران، و نرم‌افزار Cplex استفاده کردند. مارتین و همکاران [۱۰]، مدل دوسطحی هاب را پیشنهاد کردند که در آن، ارتباط کاملی میان هاب‌های مرکزی برقرار نیست، اما در سطح پایین، ارتباط میان نقاط تقاضا با یکدیگر کامل است. آن‌ها این مسئله را با الگوریتم شاخه و کران حل کردند. پان و همکاران [۱۱] در مسئله زنجیره تأمین از

جدول ۱. خلاصه مطالعات انجام‌گرفته در حوزه هاب سلسله‌مراتبی

نویسنده (سال)	نوع مسئله		نوع وسیله		تخصیص		محدودیت		روش حل	
	ه.ر.ه.ز.	ه.ر.ه.ز.	تک‌سبکی	هندسبکی	یکانه	چندگانه	زمان	هزینه	ابتکاری	فرآیند
یو هانگ چاو [۵]	*		*		*		-	-	قطعی	*
چنگ چانگ لین [۶]	*		*		*		*	-	قطعی	*
هنده یامان [۷]	*		*		*		*	-	قطعی	*
شئو هو چن [۱۲]	*		*		*		*		قطعی	*
صحرائیان و کرانی [۸]	*		*		*		*	-	قطعی	*
سییل‌ال‌مور و همکاران [۹]	*		*	*	*	*	*	-	قطعی	*
مارتین و همکاران [۱۰]	*		*		*	*	*	*	قطعی	
پان و همکاران [۱۱]	*		*		*	*	*	*	غیرقطعی	شبیه‌سازی
تحقیق حاضر	*	*	*	*	*	*	*	*	قطعی	ABC بندرز

تخصیص نقاط تقاضا به مراکز هستیم؛ به گونه‌ای که برای هر مرکز، حداقل یک تور برای دسترسی به نقاط تقاضا ایجاد و در آن، هزینه‌های استقرار و مسیریابی کمینه شود. با توجه

مسئله مکان‌یابی-مسیریابی از جمله مدل‌هایی است که در سال‌های اخیر، محققان بسیاری به آن توجه کرده‌اند. در این مسئله، به دنبال مکان‌هایی برای استقرار تسهیلات و

تحويل گیرندگان یک هاب نیز دارای مسیریابی جداگانه‌اند. آن‌ها مسئله را در اندازه کوچک با نرم‌افزار C-plex و در اندازه متوسط و بزرگ، با الگوریتم فراابتکاری ژنتیک حل کردند. مینگ ژون و همکاران [۲۳] مدل هاب-مسیریابی چندسبکی را پیشنهاد کردند که در آن، برای هر نقطه تقاضا، مهلتی برای اعزام وسیله نقلیه در نظر گرفته شد و آن را با الگوریتم بهبودیافته ژنتیک حل کردند. جدول ۲ خلاصه‌ای از مطالعات پیشین در حوزه هاب-مسیریابی را نشان می‌دهد که در آن، جایگاه مطالعه حاضر نیز در آن مشخص شده است. به‌طور خلاصه می‌توان ارائه مدل ریاضی هاب-سلسله‌مراتبی، هم‌زمان با مسیریابی در آخرین سطح و سپس حل آن به‌وسیله الگوریتم‌های بندرز و زنبورعسل را از نوآوری‌های این تحقیق به‌شمار آورد.

### مدل ریاضی

در این قسمت، مدل‌سازی مسئله مکان‌یابی هاب سلسله‌مراتبی با مسیریابی<sup>۳</sup> (H.H.R) در پایین‌ترین سطح به‌صورت تک‌تخصیصی ارائه می‌شود. در این مدل، سه سطح در نظر گرفته شده است که شامل هاب‌های مرکزی و هاب‌های غیرمرکزی با ظرفیت‌های محدود است. مشتریان در پایین‌ترین سطح قرار دارند و فقط از طریق هاب‌های غیرمرکزی مراسلات خود را ارسال و دریافت می‌کنند و مسیریابی بین هاب غیرمرکزی و مشتریان تخصیص یافته به آن‌ها انجام می‌شود. شایان ذکر است سایر مفروضات مربوط به مسئله هاب، سلسله‌مراتبی و مسیریابی همانند فرم کلاسیک به‌عنوان مفروضات این مطالعه در نظر گرفته شده است. همچنین نقاط بالقوه احداث هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی از قبل مشخص شده‌اند و در هر نقطه، امکان احداث هاب مرکزی یا غیرمرکزی وجود دارد. متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل به‌صورت زیر است:

### مجموعه‌ها

- $I$  مجموعه مشتریان  $i \in I$ ;
- $J$  مجموعه نقاط بالقوه هاب غیرمرکزی  $j \in J$ ;
- $K$  مجموعه شامل مشتریان و نقاط بالقوه هاب غیرمرکزی  $k \in K (I \cup J = K)$ ;
- $L$  مجموعه نقاط بالقوه هاب‌های مرکزی  $l \in L$ ;
- $V$  مجموعه وسایل نقلیه  $v \in V$ .

به این‌که بسیاری از هزینه‌های غیرمستقیم زنجیره تأمین، با هزینه‌های حمل‌ونقل مرتبط است، طراحی و مسیریابی دقیق یک شبکه زنجیره تأمین به کاهش قابل‌توجه هزینه‌ها منجر می‌شود. در این زمینه، پرودهون و پرینس [۱۳] به بررسی انواع مختلف مدل مکان‌یابی-مسیریابی، اعم از مکان‌یابی-مسیریابی دومرحله‌ای، مسیریابی تراک و تریلر، مکان‌یابی-مسیریابی چنددوره‌ای و... و نیز روش‌های حل به‌کاررفته پرداخته‌اند.

در پژوهش حاضر، در مسئله هاب-مسیریابی<sup>۲</sup> (H.R) به‌دنبال مکان‌هایی برای استقرار هاب و تخصیص نقاط تقاضا به هاب‌ها از طریق تورهای مسیر هستیم؛ به‌گونه‌ای که هزینه‌های استقرار و مسیریابی کمینه شود. در این حوزه، ژیان ژانگ و همکاران [۱۴] مسئله هاب‌مسیریابی را به‌منظور پیدا کردن مسیرهای بهینه، با هدف کمینه کردن ابعاد ناوگان حمل‌ونقل و هزینه‌های ارسال کالا بررسی کردند و برای حل این مسئله، از الگوریتم فراابتکاری ژنتیک بهره گرفتند. ستینر و همکاران [۱۵] به مدل‌سازی مسئله هاب-مسیریابی به‌صورت چندهدفه برای سیستم پستی ترکیه پرداختند. در مطالعه مذکور، منظور از مسیریابی در شبکه هاب، یافتن مسیر بسته‌ای برای بازدید از نقاط تقاضاست که در هر مسیر، فقط یک وسیله نقلیه خدمات ارائه می‌دهد. کامارگو و همکاران [۱۶] با در نظر گرفتن ظرفیت، به مدل‌سازی یک مسئله هاب-مسیریابی پرداختند و با الگوریتم دقیق بندرز، آن را حل کردند. رودریگز و همکاران [۱۷] مدل ریاضی مختلط صحیحی برای مسئله هاب-مسیریابی ارائه کردند که در آن، برای هر هاب تنها یک وسیله نقلیه در نظر گرفته شده و با استفاده از الگوریتم شاخه و کران حل شده است. در مطالعه کریمی و ستاک [۱۸] ارتباط هاب‌ها به‌صورت کامل در نظر گرفته نشده است؛ بدین معنا که لزوماً همه هاب‌ها با یکدیگر در ارتباط نیستند و برای مسیر بین هاب‌ها هزینه‌های نگهداری و استهلاک لحاظ شده است. سپس با استفاده از روش لاگرانژ، حد پایین برای مسئله محاسبه شده و با اضافه کردن نامعادلات معتبر، کارایی روش بهبود یافته است. ریک و همکاران [۱۹] مدل هاب‌مسیریابی دریافت و تحویلی ارائه کردند که در آن، دریافت‌کنندگان یک هاب دارای یک مسیر، و

متغیرهای تصمیم	پارامترها
$w_j$ اگر هاب غیرمرکزی در نقطه $z$ احداث شود برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر؛	$\alpha$ نرخ تخفیف بین هاب مرکزی و غیرمرکزی؛ $\alpha'$ نرخ تخفیف بین هاب‌های مرکزی؛
$h_l$ اگر هاب مرکزی در نقطه $l$ احداث شود برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر؛	$d_{kr}$ ماتریس فاصله بین نقاط تقاضا و نقاط بالقوه هاب‌های غیرمرکزی؛
$z_{ijl}$ اگر اتصال مشتری $i$ به هاب غیرمرکزی $z$ و هاب مرکزی $l$ برقرار باشد برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر؛	$t_{im}$ میزان جریان بین نقاط تقاضا؛ $u$ تعداد هاب‌های غیرمرکزی؛ $u'$ تعداد هاب‌های مرکزی؛
$p_{krv}$ اگر مسیر $k$ به $r$ با وسیله $v$ متصل باشد برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر؛	$D_i$ میزان تقاضای مشتری $i$ ؛ $F$ ظرفیت وسیله نقلیه؛
$f_{ilqm}$ اگر مشتری $i$ به هاب مرکزی $l$ و مشتری $m$ به هاب مرکزی $q$ متصل باشد برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر؛	$W_j$ ظرفیت هر هاب غیرمرکزی؛ $b_l$ هزینه احداث هاب مرکزی؛ $b'_j$ هزینه احداث هاب غیرمرکزی؛
$g_{ijl}$ میزان جریانی که مشتری $i$ از طریق هاب غیرمرکزی $z$ به هاب مرکزی $l$ ارسال و دریافت می‌کند؛	$G$ هزینه ثابت استفاده از وسیله نقلیه.
$m_{kv}$ متغیر مصنوعی حذف زیر تور.	

جدول ۲. خلاصه مطالعات انجام گرفته در حوزه هاب-مسیریابی

نویسنده	مرکز	میانگین	پوششی	سلسله‌مراتبی		بگانه	چندگانه	زمان	ظرفیت	میانگین	ابتکاری	فرآیند	روش حل	نوع مسئله هاب		نوع تخصیص	محدودیت
				میانگین	پوششی												
ناگی و ساهلی [۲۰]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
وازنر-زایفل [۲۱]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
سو و سیه [۲۲]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
ژیان ژانگ و همکاران [۱۴]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
ستینر و همکاران [۱۵]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
کامارگو و همکاران [۱۶]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
رودریگز و همکاران [۱۷]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
کریمی و ستاک [۱۸]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
ریک و همکاران [۱۹]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
مینگ ژون و همکاران [۲۳]	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	
تحقیق حاضر	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	روش حل	نوع مسئله هاب	نوع تخصیص	محدودیت	

نقطه تقاضا را می‌توان فقط به یک هاب مرکزی از طریق یک هاب غیرمرکزی متصل کرد. محدودیت‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهد متغیر تخصیص، زمانی یک است که هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی مربوط احداث شده باشند. محدودیت‌های ۵ و ۶ نمایانگر تعداد هاب‌های غیرمرکزی و مرکزی هستند. محدودیت‌های ۷ و ۸ تضمین می‌کنند متغیر  $f_{ilqm}$  زمانی یک است که مشتری  $i$  به هاب مرکزی  $l$  و مشتری  $m$  به هاب  $q$  متصل شده باشد. محدودیت ۹ میزان جریان عبوری از هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی را محاسبه می‌کند. محدودیت ۱۰ نشان می‌دهد هر مشتری فقط می‌تواند به یک نقطه تقاضای دیگر یا یک هاب غیرمرکزی متصل شود. محدودیت ۱۱ نشان می‌دهد کمان وارد شده به یک نقطه تقاضا باید یک کمان خارج شونده داشته باشد. محدودیت ۱۲ نشان می‌دهد که هر وسیله می‌تواند فقط از یک هاب غیرمرکزی خارج شود. محدودیت ۱۳ تضمین می‌کند که میزان تقاضاهای مشتریان داخل یک تور، از ظرفیت وسیله نقلیه بیشتر نشود. محدودیت ۱۴ بیانگر آن است که هاب غیرمرکزی  $j$  با نقطه تقاضای  $m$  زمانی در یک تور قرار می‌گیرند که نقطه تقاضای  $m$  به هاب غیرمرکزی  $j$  تخصیص داده شده باشد. محدودیت ۱۵ تضمین می‌کند که دو هاب غیرمرکزی نمی‌توانند در یک تور واقع شوند. محدودیت ۱۶ تضمین می‌کند که تقاضای مشتریان تخصیص یافته به یک هاب غیرمرکزی، از ظرفیت آن هاب بیشتر نباشد. محدودیت‌های ۱۷ و ۱۸ محدودیت‌های حذف زیرتور بین نقاط تقاضا هستند.

### بررسی عملکرد مدل و تحلیل حساسیت

به منظور بررسی صحت عملکرد مدل و انجام دادن تحلیل حساسیت، تعدادی مسئله موردی در اندازه‌های مختلف با استفاده از ماتریس فواصل  $CAB\ data\ set$  بررسی و با استفاده از نرم افزار بهینه سازی GAMS حل شده‌اند.

در جدول ۳، مقدار تابع هدف مدل ارائه شده هاب سلسله‌مراتبی-مسیریابی (H.H.R) با مدل هاب سلسله‌مراتبی (H.H) و مدل هاب مسیریابی (H.R) مقایسه شده است.

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} ad_{jl} g_{ijl} + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{q \in L} \sum_{m \in I} \sum_{l \in L} t_{im} \alpha' d_{lq} f_{ilqm} + \sum_{l \in L} b_l h_l + \sum_{j \in J} b'_j w_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{v \in V} G p_{ijv} + \sum_{k \in K} \sum_{r \in K} \sum_{v \in V} d_{kr} p_{krv} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} z_{ijl} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$z_{ijl} \leq w_j \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (3)$$

$$z_{ijl} \leq h_l \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} w_j = u \quad (5)$$

$$\sum_{l \in L} h_l = u' \quad (6)$$

$$f_{ilqm} + 1 \geq z_{ijl} + z_{mnq} \quad \forall i \in I, m \in I \setminus \{i\}, l \in L, q \in L \setminus \{l\}, j \in J, n \in J \quad (7)$$

$$\sum_{q \in L} \sum_{l \in L \setminus \{q\}} f_{ilqm} \leq 1 \quad \forall i \in I, m \in I \setminus \{i\} \quad (8)$$

$$g_{ijl} \geq \sum_{m \in I \setminus \{i\}} (t_{im} + t_{mi})(z_{ijl} - z_{mjl}) \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} p_{ikv} = 1 \quad \forall k \in K, v \in V \quad (10)$$

$$\sum_{k \in K} p_{krv} = \sum_{k \in K} p_{rkv} \quad \forall r \in K, v \in V \quad (11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ijv} \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} D_i p_{ikv} \leq F \quad \forall v \in V \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} p_{jiv} + \sum_{k \in K} p_{kmv} \leq 1 + \sum_{l \in L} z_{mjl} \quad \forall m \in I, j \in J, v \in V \quad (14)$$

$$p_{jmv} = 0 \quad \forall j \in J, n \in J, v \in V \quad (15)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} D_i z_{ijl} \leq W_j w_j \quad \forall j \in J \quad (16)$$

$$m_{kv} - m_{iv} + (N p_{kiv}) \leq N - 1 \quad \forall i \in I, k \in K, v \in V \quad (17)$$

$$m_{jv} = 1 \quad \forall j \in J, v \in V \quad (18)$$

تابع هدف، شامل مجموع هزینه‌های ارسال از هاب غیرمرکزی به هاب مرکزی، بین دو هاب مرکزی، هزینه احداث هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی، هزینه احداث مسیر و هزینه مسیریابی است. محدودیت ۲ نشان می‌دهد هر

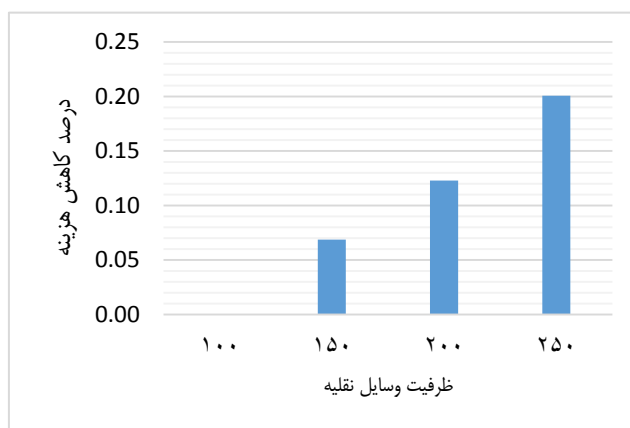
جدول ۳. مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با دیگر مدل‌ها

مسئله	تعداد نقاط	مرکز	تعداد هاب‌های غیرمرکزی	تعداد هاب‌های	تعداد هاب (H.R)	مقدار تابع (H.R)	مقدار تابع (H.H)	مقدار تابع هدف (H.H.R)
	۱۰	۲	۱	۳	۲,۸۸۴,۳۲۶	۳,۶۲۶,۵۳۸	۲,۳۷۳,۱۶۴	
ا)	۱۰	۲	۲	۴	۳,۴۲۸,۶۱۲	۴,۰۲۷,۸۲۹	۲,۷۷۳,۱۰۴	
	۱۰	۳	۲	۵	۴,۹۷۸,۲۴۶	۵,۸۲۶,۳۸۰	۴,۳۷۴,۲۷۵	
	۱۴	۲	۱	۳	۳,۱۰۶,۵۳۹	۳,۷۸۲,۸۹۶	۲,۵۸۷,۹۹۶	
ب)	۱۴	۲	۲	۴	۳,۴۶۲,۱۷۳	۳,۹۵۲,۷۱۸	۲,۸۷۸,۸۹۰	
	۱۴	۳	۳	۶	۴,۳۹۷,۱۶۸	۴,۸۹۷,۳۲۱	۳,۹۹۵,۷۲۵	

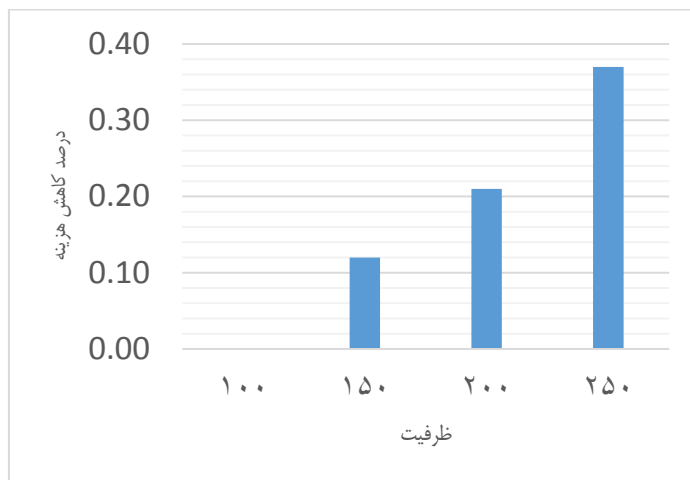
سلسله‌مراتبی مسیریابی، زمانی به مقدار تابع هدف هاب- مسیریابی نزدیک می‌شود که مقدار هزینه ثابت هاب‌های سطح یک و دو و همچنین هزینه‌های تخفیف بین هاب‌ها به هم نزدیک باشد. به منظور سنجش اعتبار و صحت مدل، تحلیل‌های حساسیت دیگری روی عناصر مختلف مدل نیز انجام شده است که در ادامه ارائه می‌شود.

با توجه به آنکه ظرفیت وسیله نقلیه، عامل مهمی در تعیین تعداد نقاط هر تور است، انتظار می‌رود با افزایش ظرفیت وسیله نقلیه، تعداد تور در هر هاب غیرمرکزی و نیز مقدار تابع هدف کاهش یابد. نمودارهای ۱ و ۲ این مطلب را در مسائل الف و ب به وضوح نشان می‌دهند.

با توجه به نتایج درج شده در جدول ۳، ملاحظه می‌شود که با حل مدل به صورت سلسله‌مراتبی و بدون لحاظ کردن مسیریابی به دلیل ارسال یک وسیله مستقیم برای هر نقطه تقاضا از هاب‌های غیرمرکزی، مجموع هزینه مسیر افزایش خواهد یافت. به علاوه، حل مسئله در حالت سلسله‌مراتبی بدون مسیریابی، یک حد بالا برای مدل پیشنهادی است. همچنین مقادیر تابع هدف مدل سلسله‌مراتبی و مدل پیشنهادی، زمانی به هم نزدیک می‌شوند که هزینه ثابت وسیله نقلیه برای ارسال به هر نقطه تقاضا ناچیز باشد، اما مقدار تابع هدف هاب- مسیریابی، حد بالای بهتری در مقایسه با هاب سلسله‌مراتبی است و مقدار تابع هدف



نمودار ۱. تأثیر ظرفیت وسایل نقلیه بر هزینه مسئله الف-۲

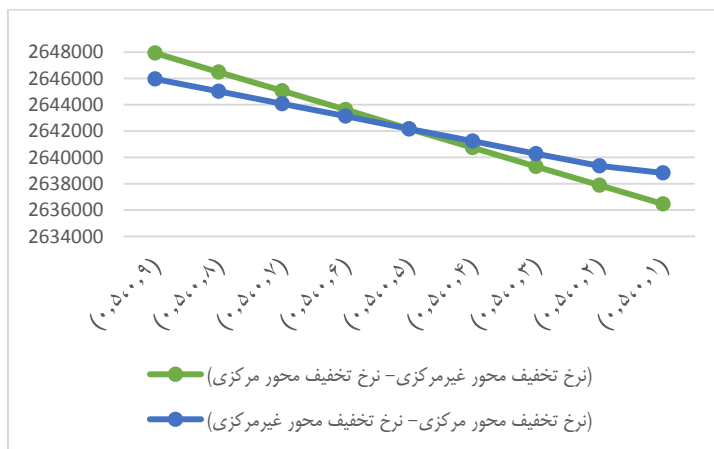


نمودار ۲. تأثیر ظرفیت وسایل نقلیه بر هزینه مسئله ب-۳

در ادامه، به منظور بررسی میزان اثربخشی تصمیم هم‌زمان مکان‌یابی هاب سلسله‌مراتبی و مسیریابی مدل پیشنهادی، مقدار تابع هدف به دست آمده با مقدار تابع هدف حل ترتیبی مسئله مقایسه شد. در حل ترتیبی، ابتدا مسئله مکان‌یابی هاب سلسله‌مراتبی حل شد. سپس مسیریابی برای پایین‌ترین سطح انجام گرفت و در نهایت، مجموع هزینه‌ها محاسبه شد. در جدول ۴، نتایج مقایسه مدل پیشنهادی با حل ترتیبی ارائه شده است.

از دیگر پارامترهای مؤثر بر میزان هزینه مدل ارائه شده، پارامتر نرخ تخفیف، بین هاب غیرمرکزی و مرکزی و بین هاب‌های مرکزی است. با کاهش هر کدام از نرخ‌های تخفیف، میزان هزینه مدل نیز کاهش می‌یابد که این مورد نیز در نمودار ۳ مشاهده می‌شود. همان‌طور که در این نمودار پیداست، شیب کاهش هزینه، زمانی بیشتر خواهد بود که تخفیف بین هاب‌های غیرمرکزی و مرکزی بیشتر شود، زیرا لازم نیست تقاضای تمامی نقاط، از هاب‌های مرکزی عبور کند.

مجموعه تحلیل‌های عددی و نمودارهای فوق، نشان‌دهنده صحت عملکرد مدل است.



نمودار ۳. مقایسه کاهش مقدار تابع هدف با افزایش نرخ تخفیف بین هاب‌ها



جدول ۴. مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با حل ترتیبی آن‌ها

مسئله	تعداد نقاط	تعداد هاب مرکزی	تعداد هاب غیر مرکزی	مقدار تابع هدف رویکرد ترتیبی (H.H.R)	مقدار تابع هدف
	۱۰	۲	۱	۲,۳۷۳,۱۶۴	۲,۴۵۲,۱۷۸
الف	۱۰	۲	۲	۲,۷۷۳,۱۰۴	۲,۸۱۰,۴۲۶
	۱۰	۳	۲	۴,۳۷۴,۲۷۵	۴,۳۹۸,۳۱۹
	۱۴	۲	۱	۲,۵۸۷,۹۹۶	۲,۶۸۱,۹۸۱
ب	۱۴	۲	۲	۲,۸۷۸,۸۹۰	۲,۹۱۶,۵۵۱
	۱۴	۳	۳	۳,۹۹۵,۷۲۵	۴,۱۰۸,۳۷۱

### مسئله اصلی HHR

با توجه به اینکه با حل مسئله اصلی، حد پایین به دست می‌آید، با تعریف متغیر  $Z_{lower}$  به صورت حد پایین هزینه کل، مسئله اصلی (MP) به شکل زیر تعریف می‌شود که مسئله اصلی، فقط شامل محدودیت‌هایی می‌شود که متغیر سخت، به تنهایی در آن باشد.

$$\min z_{lower\ bound} \quad (19)$$

subject to: (۹-۲) و (۱۱-۱۹)

$$z_{lower\ bound} \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \alpha d_{jl} g_{ijl} + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{q \in L} \sum_{m \in I} t_{im} \alpha' d_{lq} f_{ilqm} + \sum_{l \in L} b_l h_l + \sum_{j \in J} b'_j w_j + \sum_{k \in K} \sum_{r \in K} \sum_{v \in V} d_{kr} p_{krv} \quad (20)$$

### زیرمسئله HHR

در فضای متغیر  $g_{ijl}$  برای هر بردار به صورت  $z_{ijl}$  زیر تعریف می‌شود:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \alpha d_{jl} g_{ijl} \quad (21)$$

$$g_{ijl} \geq \sum_{m \in I} (t_{im} + t_{mi}) (z'_{ijl} - z'_{mjl}) \quad (22)$$

$$\forall i \in I, j \in J, l \in L$$

در واقع، زیرمسئله SP شامل بقیه پارامترهایی است که در مسئله اصلی به کار نرفته‌اند. متغیر سخت در اینجا به عنوان پارامتر در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه فضای مسئله دوگان، مستقل از متغیر سخت است.

همان‌گونه که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف حاصل از حل ترتیبی مدل، به دلیل در نظر نگرفتن هم‌زمان توابع هدف مرتبط با آن، بیشتر از مدل پیشنهادی است که هم‌زمان به دنبال کمینه کردن هزینه‌های احداث و مسیریابی است.

با توجه به موارد ذکر شده، مدیران و متولیان حمل‌ونقل در زمینه‌های مختلف، نظیر حمل‌ونقل کالا، حمل‌ونقل درون و برون شهری، شبکه‌های پستی و... می‌توانند بر اساس نتایج به دست آمده از مدل، شبکه مورد نظر را اجرا کنند تا از کارایی حاصل برای توسعه شبکه استفاده کنند.

### الگوریتم تجزیه بندرز

الگوریتم تجزیه بندرز، توسط بندرز [۲۴] برای حل مسائل عدد صحیح مختلط ارائه شد. روش تجزیه بندرز، یکی از رویکردهای تجزیه و روش‌های حل دقیق است که بر پایه تجزیه مسئله، به دو قسمت اصلی<sup>۴</sup> (MP) و زیرمسئله<sup>۵</sup> (SP) عمل می‌کند. در این روش، از ارتباط میان زیرمسئله و دوگان آن استفاده می‌شود و با اضافه کردن برش‌هایی در راستای بهینگی و شدنی بودن به مسئله اصلی (MP) همگرایی حد بالا و پایین، تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد. در هر تکرار الگوریتم، نقطه‌ای گوشه‌ای از مسئله دوگان زیرمسئله به دست می‌آید و فضای حل مسئله، از آن نقطه برش داده می‌شود. جواب بهینه، زمانی به دست می‌آید که حدود بالا و پایین به هم نزدیک یا با هم منطبق شوند.

## دوگان زیرمسئله HHR

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} (t_{im} + t_{mi})(z'_{ijl} - z'_{mjl}) q_{ijl} \quad (23)$$

$$q_{ijl} \geq \alpha d_{jl} \quad i \in I, j \in J, l \in L \quad (24)$$

نکته قابل توجه در الگوریتم بندرز این است که ما با زیرمسئله کاری نداریم، بلکه با دوگان آن کار داریم. دوگان زیرمسئله<sup>۶</sup> (DSP) مورد مطالعه به صورت زیر است:

شبه‌کد الگوریتم بندرز به صورت زیر است:

۱. مسئله اصلی (MP) را حل کنید.
۲. چنانچه مسئله اصلی (MP) حل‌نشده باشد، توقف کنید. در غیر این صورت با مقادیر متغیرهای سخت به دست‌آمده از گام ۱، دوگان زیرمسئله (DSP) را حل کنید.
۳. اگر جواب به دست‌آمده از مسئله اصلی (MP) و دوگان زیرمسئله (DSP) به هم نزدیک باشند، توقف کنید و جواب متغیرهای زیرمسئله را گزارش دهید. در غیر این صورت، برش بهینگی را به مسئله اصلی اضافه کنید و به گام ۱ برگردید.
۴. اگر جواب دوگان زیرمسئله (DSP) بی‌کران بود، برش شدنی با حل مسئله را به مسئله اصلی اضافه کنید و به گام ۱ برگردید.
۵. اگر جواب دوگان زیرمسئله نشدنی باشد، مسئله اصلی جواب ندارد یا بی‌کران است؛ پس توقف کنید.

۱۴	۱۴	۱۵	-۱	۸	۱۱	۱۰	۰	۰	۰
۸	۲	۱	۱۱	۷	۵	۱۰	۳	۴	۶
۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱

شکل ۲. نمایش جواب برای مسئله هاب سلسله‌مراتبی-مسیریابی

برای مسائل بهینه‌سازی بدون محدودیت، شبیه‌سازی می‌کند. با توجه به اینکه اساساً این روش برای مسائل پیوسته به کار می‌رود، این الگوریتم باید برای مسئله مورد نظر تطبیق یابد. سزتو و همکاران [۲۶] برای جست‌وجوی همسایگی، روش‌هایی مانند معکوس‌سازی، تعویض، واردکردن و... را پیشنهاد دادند که از این ایده در مطالعه حاضر استفاده شده است.

نمایش جواب پیشنهادی با توجه به شکل ۱ - که شامل دو هاب مرکزی و سه هاب غیرمرکزی و هفت نقطه تقاضاست - در شکل ۲ آمده است.

نمایش جواب پیشنهادی در سه ردیف و به تعداد هاب غیرمرکزی، به اضافه تعداد نقاط تقاضای ستون تشکیل شده است. در ردیف اول، ابتدا هاب‌های مرکزی بعد از آن عدد ۱- حائل بین هاب‌های مرکزی و غیرمرکزی و سپس هاب‌های غیرمرکزی به ترتیب تخصیص آن‌ها به هاب‌های مرکزی جای‌گذاری شده‌اند. ردیف دوم نشان‌دهنده

با توجه به اینکه الگوریتم تجزیه بندرز، برای حل مدل پیشنهادی در اندازه‌های بزرگ، کارایی لازم را ندارد، برای حل مسئله در اندازه‌های بالاتر لازم است از یک الگوریتم فراابتکاری استفاده شود. شایان ذکر است که الگوریتم فراابتکاری، روشی دقیق نیست و جواب‌های نزدیک بهینه را استخراج می‌کند، حال آنکه الگوریتم بندرز، به‌عنوان یک الگوریتم دقیق، توانایی یافتن جواب بهینه را دارد؛ بنابراین، در صورتی که اندازه مسئله مورد نظر بزرگ نباشد و در زمان معقول، الگوریتم بندرز بتواند مسئله را حل کند، اولویت خواهد داشت. در ادامه، روش الگوریتم فراابتکاری زنبورعسل مصنوعی آمده است.

## الگوریتم زنبورعسل مصنوعی

الگوریتم زنبورعسل مصنوعی در خانواده الگوریتم‌های تکاملی مانند GA و PSO طبقه‌بندی می‌شود. این الگوریتم را کارابوگا [۲۵] ارائه کرد که رفتار کاوشی کلونی زنبورها را

هاب‌های غیرمرکزی و نقاط تقاضای تخصیص‌یافته به آن‌هاست و در ردیف سوم، عدد ۱ نمایانگر انتهای مسیر شروع‌شده از اولین هاب پیش از خود است.

سه عملگر به‌کاررفته در مقاله برای تولید جواب همسایگی، در جدول ۵ آمده است.

جدول ۵. نمایش عملگرهای به‌کاررفته در مقاله

عملگر تعویض										
قبل	۸	۲	۱	۱۱	۷	۵	۱۰	۳	۴	۶
بعد	۸	۱۰	۱	۱۱	۷	۵	۲	۳	۴	۶
عملگر معکوس کردن										
قبل	۸	۲	۱	۱۱	۷	۵	۱۰	۳	۴	۶
بعد	۸	۲	۳	۱۰	۵	۷	۱۱	۱	۴	۶
عملگر وارد کردن										
قبل	۸	۲	۱	۱۱	۷	۵	۱۰	۳	۴	۶
بعد	۸	۱	۱۱	۷	۵	۱۰	۲	۳	۴	۶

ج) اگر مقدار جواب مکان‌های جست‌وجو شده از مکان فعلی بهتر باشد، آن مکان جایگزین  $li=0$  و در غیر این صورت جایگزین  $li=li+1$  می‌شود؛

۳-۴. برای هر جواب: چک کردن  $li=L$ ؛ در این صورت، جواب فعلی با جواب دیگری که به‌صورت تصادفی ایجاد شده، جابه‌جا می‌شود.

۵. توقف در صورتی که  $v=max\ iteration$ .

### بررسی مثال‌ها و مقایسات عددی

در جدول ۶، نتایج محاسباتی استفاده از الگوریتم زنبورعسل مصنوعی در مقایسه با الگوریتم بندرز و نرم‌افزار بهینه‌سازی GAMS آمده است.

همچنین شبه‌کد الگوریتم مصنوعی زنبورعسل به‌صورت زیر است:

۱. تولید جواب اولیه براساس نمایش جواب؛
۲. محاسبه برازندگی هر یک از جواب‌های تولیدشده؛
۳. تنظیم پارامتر شمارش تکرار  $v=0$  و حد جست‌وجوی همسایگان یک جواب  $li=0$ ؛
۴. تکرار مراحل زیر:
  - ۱-۴. برای هر جواب:

الف) جست‌وجوی همسایگی با استفاده از عملگرهای معرفی‌شده؛

ب) اگر مقدار جواب‌های جست‌وجوشده از جواب فعلی بهتر باشد، آن جواب جایگزین  $li=0$  و در غیر این صورت جایگزین  $li=li+1$  می‌شود؛

۲-۴. جست‌وجوی بیشتر بین جواب‌های موجود:

الف) انتخاب یک جواب با استفاده از چرخه رولت؛

ب) جست‌وجوی همسایگی با استفاده از عملگرهای

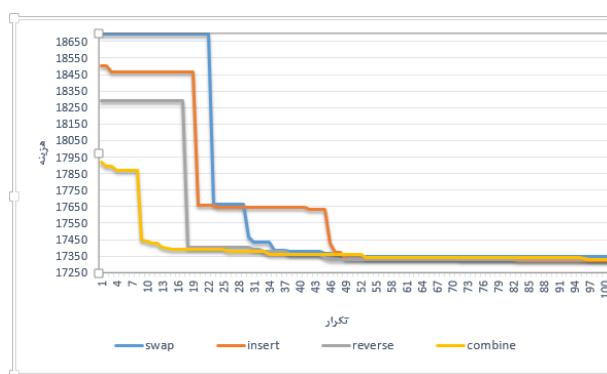
معرفی‌شده؛

جدول ۶. مقایسه نتایج حل مدل HHR با استفاده از نرم افزار GAMS، الگوریتم بندرز و الگوریتم فراابتکاری زنبور عسل

ردیف مسئله	تعداد نقاط	تعداد هاب‌های غیر مرکزی	تعداد هاب‌های مرکزی	مقدار تابع هدف با نرم افزار GAMS	مقدار تابع هدف با الگوریتم بندرز	مقدار تابع هدف الگوریتم ABC	GAP (%)	متوسط زمان حل در نرم افزار GAMS (دقیقه)	متوسط زمان حل در بندرز (دقیقه)	متوسط زمان حل در ABC (دقیقه)
	۱۰	۲	۱	۲,۳۷۳,۱۶۴	۲,۳۷۳,۱۶۴	۲,۳۷۳,۱۶۴	۰			
ا	۱۰	۲	۲	۲,۷۷۳,۱۰۴	۲,۷۷۳,۱۰۴	۲,۷۷۳,۱۰۴	۰	۳	۵	۶
	۱۰	۳	۲	۴,۳۷۴,۲۷۵	۴,۳۷۴,۲۷۵	۴,۳۷۴,۲۷۵	۰			
	۱۴	۲	۱	۲,۵۸۷,۹۹۶	۲,۵۸۷,۹۹۶	۲,۵۸۷,۹۹۶	۰			
ب	۱۴	۲	۲	۲,۸۷۸,۸۹۰	۲,۸۷۸,۸۹۰	۲,۸۷۸,۸۹۰	۰	۱۰	۲۰	۱۷
	۱۴	۳	۳	۸۹۵,۷۲۵,۳	۸۹۵,۷۲۵,۳	۸۹۵,۷۲۵,۳	۰			
	۱۷	۳	۳	۴,۲۲۷,۴۳۲	۴,۲۲۷,۴۳۲	۴,۲۲۷,۴۳۲	۰			
ج	۱۷	۳	۲	۳,۷۴۷,۷۱۱	۳,۷۴۷,۷۱۱	۳,۷۴۷,۷۱۱	۰	۱۷	۳۰	۳۵
	۱۷	۲	۲	۲,۶۳۸,۸۲۳	۲,۶۳۸,۸۲۳	۲,۶۳۸,۸۲۳	۰			
	۲۰	۳	۳	۳,۷۴۱,۰۲۵	۳,۷۴۱,۰۲۵	۳,۷۸۵,۹۱۷	۱/۳			
د	۲۰	۴	۳	۴,۲۸۵,۶۱۷	۴,۲۸۵,۶۱۷	۴,۳۱۹,۹۰۱	۰/۹	۴۰	۷۵	۹۰
	۲۰	۴	۴	۵,۸۲۳,۹۴۳	۵,۸۲۳,۹۴۳	۵,۸۶۴,۷۱۰	۰/۷			
	۲۵	۲	۲	-	۶,۲۶۵,۸۷۵	۶,۳۲۸,۵۳۳	۱	-		
	۲۵	۳	۲	-	۶,۵۳۹,۸۷۴	۶,۶۳۲,۷۴۱	۱/۳	-		
ه	۲۵	۳	۳	-	۶,۹۴۵,۲۱۵	۷,۰۸۶,۸۹۹	۱/۵	-	۳۰۰	۵۰۰
	۲۵	۴	۳	-	۶,۹۹۸,۵۴۲	۷,۰۷۵,۵۲۵	۱/۱	-		
	۴۰	۵	۳	-	-	۱۷,۳۲۵,۲۱۸	-	-	-	-
و	۴۰	۶	۴	-	-	۱۹,۲۸۳,۶۱۰	-	-	-	۷۲۰
	۴۰	۵	۵	-	-	۱۸,۹۶۵,۲۴۱	-	-	-	-
	۸۰	۵	۴	-	-	۱,۲۴۱,۳۴۳,۹۲۷	-	-	-	-
ز	۸۰	۶	۴	-	-	۱,۲۴۷,۱۹۷,۳۶۱	-	-	-	۹۰۰
	۸۰	۸	۶	-	-	۱,۲۶۶,۲۵۱,۹۷۳	-	-	-	-

نیست و استفاده از الگوریتم فراابتکاری زنبورعسل مصنوعی ضرورت می‌یابد. میزان اختلاف جواب در الگوریتم فراابتکاری و نرم‌افزار بهینه‌سازی در مسائل د و ه حداکثر ۱/۵ درصد و قابل قبول است. با این توضیحات مشخص می‌شود الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی زنبورعسل مصنوعی، کارایی مناسبی برای حل مدل هاب سلسله‌مراتبی مسیریابی دارد.

نمودار ۴، کارایی عملگرهای جست‌وجوی همسایگی را با عملگر ترکیبی در مسئله و-۴ مقایسه می‌کند که برای نمونه آورده شده است. همان‌طور که در نمودار مشخص است، جست‌وجوی عملگر ترکیبی، از سایر جست‌وجوگرها عملکرد بهتری دارد و بعد از آن، عملگر عکس کردن کارایی بهتری از خود نشان می‌دهد.



نمودار ۴. مقایسه عملکرد عملگرهای معرفی شده

مشخص شد نرم‌افزار بهینه‌سازی، الگوریتم تجزیه بندرز و فراابتکاری زنبورعسل مصنوعی، به ترتیب برای اندازه کوچک، متوسط و بزرگ کارایی دارند. برای مطالعات آینده می‌توان حالتی را در نظر گرفت که ارتباط میان هاب‌های مرکزی کامل نباشد یا مسیریابی بین هاب‌های مرکزی لحاظ شود. به علاوه می‌توان عدم قطعیت را در مدل پیشنهادی، برای نزدیک‌تر کردن آن به مسائل دنیای واقعی وارد کرد. حل مدل پیشنهادی با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری یا استفاده از الگوریتم‌های تسریع‌بخش بندرز را نیز می‌توان به عنوان مسیریابی برای مطالعات آتی در نظر گرفت.

همان‌طور که در جدول ۶ آمده است، در مسائل کوچک، کارایی نرم‌افزارهای بهینه‌سازی در حل مسئله و زمان رسیدن به جواب بهینه، بیشتر از الگوریتم تجزیه بندرز و الگوریتم فراابتکاری است؛ برای مثال، در مسئله نوع الف، زمان حل مدل با استفاده از نرم‌افزار GAMS، بسیار کمتر از الگوریتم تجزیه بندرز و الگوریتم فراابتکاری زنبورعسل مصنوعی است. همچنین مسائل ب و ج نیز مشابه مسئله الف هستند، با این تفاوت که اختلاف زمان حل بین نرم‌افزار بهینه‌سازی و الگوریتم بندرز پیشنهادی کاهش می‌یابد. به علاوه، در مسئله ه با افزایش تعداد نقاط کانیدها، نرم‌افزار GAMS قادر به حل آن نیست، اما با استفاده از الگوریتم بندرز، جواب دقیق مسئله به دست می‌آید. در مسئله و، و نیز مسئله ز، با افزایش اندازه مسئله، نرم‌افزار بهینه‌سازی و روش بندرز، دیگر قادر به حل مدل در یک زمان قابل قبول

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل ریاضی مختلط عدد صحیح مسئله هاب سلسله‌مراتبی با مسیریابی در پایین‌ترین سطح، معرفی شد. همچنین نشان داده شد که این مدل، در مقایسه با مدل‌های هاب مسیریابی و هاب سلسله‌مراتبی، کارایی بیشتری (کاهش هزینه) دارد. همچنین مدل پیشنهادی با حل ترتیبی نیز مقایسه شد که نتایج، ضرورت تصمیم‌گیری هم‌زمان را در قالب مدل پیشنهادی نشان می‌دهد. در ادامه، صحت عملکرد مدل از طریق تحلیل‌های عددی بررسی شد. به علاوه برای حل مدل پیشنهادی در اندازه متوسط، از الگوریتم تجزیه بندرز و در اندازه بزرگ از الگوریتم فراابتکاری زنبورعسل مصنوعی استفاده شد. در نهایت

## مراجع

1. Alumur, S., and Kara, B. Y. (2008). "Network hub location problems: The state of the art", *European Journal of Operational Research*, Vol. 190, No. 1, PP. 1–21.
2. Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., and Nikbakhsh, E. (2013). "Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 64, No. 4, PP. 1096–1109.
3. Şahin, G., and Süral, H. (2007). "A review of hierarchical facility location models", *Computers & Operations Research*, Vol. 34, No. 8, PP. 2310–2331.
4. Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Fahimnia, B., and Kazemzadeh, N. (2014). "Hierarchical facility location problem: Models, classifications, techniques, and applications", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 68, No. 0, PP. 104–117.
5. Chou, Y. H. (1990). "The hierarchical-hub model for airline networks", *Transportation Planning and Technology*, No. 14, PP. 243–258.
6. Lin, C. C. and Chen, S. H. (2004). "The hierarchical network design problem for time-definite express common carriers", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 38, No. 3, PP. 271–283.
7. Yaman, H. (2009). "The hierarchical hub median problem with single assignment", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 43, No. 6, PP. 643–658.
8. Sahraeian, R., and Korani, E. (2010). The hierarchical hub maximal covering problem with determinate cover radiuses, *Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, 2010 IEEE International Conference.
9. Alumur, S. A., Yaman, H., and Kara, B. Y. (2012). "Hierarchical multimodal hub location problem with time-definite deliveries", *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, Vol. 48, No. 6, PP. 1107–1120.
10. Rodríguez-Martina, I., Salazar-González, J., and Yaman, H., (2016). "A branch-and-cut algorithm for two-level survivable network design problems", *Computers & Operations Research*, Vol. 67, No. 0, PP. 102–112.
11. Pan S, Nigrelli, M., Ballot, E., Sarraj, B., and Yang, Y., (2015). "Perspectives of inventory control models in the physical internet: A simulation study", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 84, No. 0, PP. 122–132.
12. Chen, S. (2010). "A heuristic algorithm for hierarchical hub-and-spoke network of time-definite common carrier operation planning problem", *Networks and Spatial Economics*, Vol. 10, No. 4, PP. 509–523.
13. Prodhon, C., and Prins C. (2014). "A survey of recent research on location-routing problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 238, No. 1, PP. 1–17.
14. Jian, Z., Yaohua, W., and Pei, L. (2007). Routing problem for hybrid hub-and-spoke transportation network: A case study of a LTL carrier. *Automation and Logistics*, 2007 IEEE International Conference on
15. Çetiner, S., Sepil, C., and Süral, H. (2010). "Hubbing and routing in postal delivery systems", *Annals of Operations Research*, Vol. 181, No. 1, PP. 109–124.
16. De Camargo, R. S., de Miranda, G., and Løkketangen, A. (2013). "A new formulation and an exact approach for the many-to-many hub location-routing problem", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 12–13, PP. 7465–7480.
17. Rodríguez-Martín, I., Salazar-González, J. J., and Yaman, H. (2014). "A branch-and-cut algorithm for the hub location and routing problem", *Computers & Operations Research*, Vol. 50, No. 0, PP. 161–174.
18. Karimi, H., and Setak, M. (2014). "Proprietor and customer costs in the incomplete hub location-routing network topology", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 3, PP. 1011–1023.

19. Rieck, J., Ehrenberg, C., and Zimmermann, J. (2014). "Many-to-many location-routing with inter-hub transport and multi-commodity pickup-and-delivery", *European Journal of Operational Research*, Vol. 236, No. 3, PP. 863–878.
20. Nagy, G. and Salhi, S. (1998). "The many-to-many location-routing problem", Vol. 6, No. 2, PP. 261–275.
21. Wasner, M., and Zäpfel, G. (2004). "An integrated multi-depot hub-location vehicle routing model for network planning of parcel service", *International Journal of Production Economics*, Vol. 90, No. 3, PP. 403–419.
22. Hsu, C. I. and Hsieh, Y. P. (2007). "Routing, ship size, and sailing frequency decision-making for a maritime hub-and-spoke container network", *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 45, No. 7–8, PP. 899–916.
23. Mingjun, J., Lixin, S., Baishun, S., Yanyan, X., and Fei, W. (2015). "Routing optimization for multi-type containerships in a hub-and-spoke network", *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, Vol. 2, No. 5, PP. 362–372.
24. Benders, J. F. (1962). "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems", *Numerische Mathematik*, Vol. 4, No. 1, PP. 238–252.
25. Karaboga, D. (2005). "An idea based on honey bee swarm for numerical optimization", Technical report Computer Engineering Department, Engineering Faculty, Erciyes University
26. Szeto, W. Y., Wu, Y., and Ho, S. C. (2011). "An artificial bee colony algorithm for the capacitated vehicle routing problem", *European Journal of Operational Research*, Vol. 215, No. 1, PP. 126–135.

### واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Hierarchical Hub
2. Hub Routing
3. Hierarchical Hub Routing
4. Master Problem
5. Sub Problem
6. Dual Sub Problem