مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز برای شبکه‌های درختی بی‌وزن: مطالعهٔ موردی

زهرا داستانی[1]، حسین کریمی[*2]

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد

۲. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد

(تاریخ دریافت ۹۵/۰۳/۱۶، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۶/۰۱/۱۱، تاریخ تصویب ۹۶/۰۸/۱)

چکیده

در این مقاله مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز با افزایش و کاهش طول کمان‌ها روی درخت بدون وزن بررسی شده است. هدف مسئله، افزایش و کاهش طول کمان‌ها در حدود داده‌شده و در کمترین هزینهٔ کل است؛ به‌طوری‌که دو رأس از پیش تعیین‌شده، به دو رأس مرکزی تبدیل شوند. به‌منظور نشان دادن کاربرد عملی این مسئله، شبکهٔ شهری بجنورد و محل دو آتش‌نشانی مهم این شهرستان به‌عنوان مکان‌های مرکز درنظر گرفته شده است، همچنین به‌منظور تحلیل محاسباتی مثالی درنظر گرفته شده و نتایج حاصل از محاسبات این مفهوم مشخص می‌شود که چنانچه دو گره انتخابی به نقاط انتهایی درخت نزدیک‌تر باشند، هزینهٔ بیشتری برای مرکزی‌شدن آن‌ها باید متحمل شد، البته باید توجه داشت که در بیشتر موارد این کار انجام‌نشدنی است.

کلمات کلیدی: بجنورد، درخت بی‌وزن، مکان‌یابی مرکز، مکان‌یابی معکوس.

مقدمه

مکان‌یابی از جمله موضوعات جذاب تحقیق در عملیات است که نقشی بسیار کاربردی را در مباحث ریاضی و در عمل بازی می‌کند. در این مسائل فرض بر این است که تقاضاهای مشتری موجود است و می‌خواهیم بهترین مکان برای قرار گرفتن سرویس‌دهندگان جدید را به‌گونه‌ای بیابیم که نحوهٔ خدمت‌رسانی، هزینهٔ حمل‌ونقل، سود، کسب بیشترین سهم بازار و اهدافی دیگر بهینه شوند. درواقع، هنگامی‌که به‌دنبال یافتن بهترین مکان و نحوهٔ استقرار برای یک یا چند تسهیل یا سرویس‌دهنده براساس عوامل و متغیرهای مؤثر بر مکان‌یابی هستیم، با مسائل مکان‌یابی مواجه می‌شویم. مطالعات جدی در این زمینه از زمانی شروع شد که حکیمی[1] [۱] تابع هدف را به دو صورت کمترین مجموع[2] و کمترین بیشینه[3] مطرح کرد؛ به عبارت دیگر، او روابط p میانه را پیشنهاد داد و معرفی کرد. علاقه‌مندان به این موضوع می‌توانند برای مرور جزئیات بیشتر در زمینهٔ مسائل مکان‌یابی به کتاب‌های داسکین[4] [۲]، هاماچر[5] [۳] و لاو[6] مراجعه کنند.

در سال‌های اخیر توجه ویژه‌ای به مسائل بهینه‌سازی معکوس شده است. از آنجا که اغلب با شرایطی مواجه می‌شویم که مکان تجهیزات و مراکز مهم خدمت‌رسانی شهری از قبیل بیمارستان‌ها، آتش‌نشانی‌ها، مراکز پلیس، پمپ‌بنزین‌ها و مواردی از این قبیل از قبل مشخص شده است و نمی‌توان آن‌ها را دوباره مکان‌یابی کرد، این مسائل نقشی اساسی را در عمل بازی می‌کنند. در مسائل مکان‌یابی معکوس سعی می‌شود که با اصلاح مقدار پارامترهای مسئلهٔ اصلی در حدود داده‌شده در کمترین هزینهٔ کل، راه‌حل شدنی از قبل مشخصی طبق مقدار پارامترهای جدید به راه‌حلی بهینه تبدیل شود. این پارامترها ممکن است طول کمان‌ها و وزن رئوس باشند.

از جمله کاربردهای مسائل مکان‌یابی معکوس می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

فرض کنید یک شبکهٔ جاده‌ای[7] با مجموعه‌ای از مشتریان و خدمات‌دهنده‌ها داده شده است. هدف مکان‌یابی مراکز خدمات‌دهنده است؛ به‌طوری‌که بیشترین فاصله به مشتری‌ها حداقل شود، اما اغلب با شرایط قبلی خدمات‌دهنده‌ها مواجه می‌شویم که با هزینه‌های معقول نمی‌توان آن‌ها را جابه‌جا کرد. در این مواقع به‌منظور اینکه خدمات‌دهندهٔ موردنظر بهینه شود می‌توان با تغییر در شبکه (بهبود جاده‌ها، مدیریت ترافیک و غیره) به این هدف دست یافت. از جمله کاربردهای دیگر این مسائل نحوهٔ خدمات‌رسانی وسایل نقلیهٔ اضطراری از قبیل آتش‌نشانی،

* نویسندهٔ مسئول: تلفن: ۲۲۸۴۶۱۱ ۵۸۴، فکس: ۲۴۱۰۷۰۰ ۵۸۴ Email: h.karimi@ub.ac.ir

مراکز پلیس و یکسان‌کردن خدمات ارائه‌شده با این وسایل است، علاوه‌بر این کاربردهایی در زمینهٔ حمل‌ونقل نیز وجود دارد که در قسمت مطالعهٔ موردی به‌طور مفصل به آن پرداخته شده است.

در این مقاله بر مسائل مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز مطلق[۸] (نقطهٔ S روی درخت بدون وزن T یک رأس مرکزی مطلق خواهد بود اگر و تنها اگر S نقطهٔ میانی طولانی‌ترین مسیر درخت T باشد) با کاهش و افزایش طول کمان‌ها تمرکز شده است که هدف تغییر طول کمان‌های داده‌شده در یک درخت بدون وزن با توجه به حدود اصلاحی داده‌شده برای هر کمان در کمترین هزینه است؛ طوری که دو رأس از قبل مشخص‌شده‌ای به دو رأس مرکزی تبدیل شوند. منظور از طول کمان حجم حمل‌ونقل، زمان و هزینهٔ سفر است که باید بین دو مسیر طی شود؛ بدین منظور برای نشان‌دادن کاربرد عملی این مسائل در دنیای واقعی تجزیه‌وتحلیل‌ها بر روی دو ایستگاه مهم آتش‌نشانی شهرستان بجنورد انجام، و نتایج بررسی شده است.

درادامه، مقاله به‌صورت زیر دنبال خواهد شد.

در بخش دوم مروری بر مطالعاتی صورت گرفته که تاکنون در زمینهٔ مسائل بهینه‌سازی معکوس انجام شده است. در بخش سوم نحوهٔ مکان‌یابی دو مرکز شرح داده شده و پارامترها و متغیرهای مسئله تعریف و درنهایت مدل ریاضی مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ارائه شده است. در بخش چهار، الگوریتم حل تقریبی برای مسئله ارائه شده است که جواب مسئله را با تخمین بسیار نزدیک به جواب بهینه به‌دست می‌آورد. در بخش پنجم نیز به‌منظور بررسی عملکرد الگوریتم ارائه‌شده و جزئیات بیان‌شده در مقاله، مثالی تجزیه‌وتحلیل می‌شود. در بخش ششم مطالعهٔ موردی مربوط به دو مرکز آتش‌نشانی در شهرستان بجنورد تشریح شده است و درنهایت در بخش هفتم نتایج حاصل از این مطالعه و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی بیان شده است.

مرور ادبیات پژوهش

گفته شد که در مسائل مکان‌یابی معکوس، مکان تجهیز مشخص است. در این بین، باید پارامترهای مسئله از قبیل طول کمان‌ها و وزن گره‌ها طوری تغییر داده شود که مکان این تجهیز مرکزی شود. در اولین مقاله‌ای که در زمینهٔ مسائل بهینه‌سازی معکوس به چاپ رسید، بورتن[۹] و تووینت[۱۰] مسئلهٔ معکوس کوتاه‌ترین مسیر را بررسی کردند [۵]. علاقه‌مندان برای بررسی جزئیات بیشتر مسائل بهینه‌سازی معکوس می‌توانند به مقالهٔ هیوبرگر[۱۱] [۶] که در همین زمینه ارائه شده است، مراجعه کنند. کای[۱۲] و همکارانش [۷] در زمینهٔ مسائل مکان‌یابی معکوس ثابت کرده‌اند که این مسائل ۱- مرکز با اصلاح طول کمان‌ها روی گراف‌های بدون وزن یک مسئله NP-Hard است، درحالی‌که مسائل مکان‌یابی ۱- مرکز اساساً در زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. یانگ[۱۳] و ژانگ[۱۴] [۸] راه‌حلی را برای مسائل مکان‌یابی معکوس ۱- مرکز روی درخت بدون وزن پیشنهاد دادند؛ به‌طوری‌که طول کمان‌های اصلاحی همیشه مثبت باقی بماند.

درادامه، بورکارد[۱۵] و همکارانش [۹] مسائل معکوس *p*- میانهٔ گسسته را درنظر گرفتند و نشان دادند این مسائل درصورتی‌که *p* ثابت و پارامتر ورودی نباشد، در زمان چندجمله‌ای حل‌شدنی است، همچنین آن‌ها برای مسائل مکان‌یابی معکوس ۱- میانه‌روی شبکهٔ درخت الگوریتم، زمانی با پیچیدگی $O(n\log n)$ پیشنهاد کردند. درادامه، همان نویسنده [۱۰] مسئلهٔ معکوس ۱- میانه را با اصلاح وزن رئوس و هزینه‌های واحد بر روی شبکهٔ دارای چرخه[۱۶] بررسی، و نتایج را ارائه کرد.

علیزاده و بورکارد [۱۱] به مسائل مکان‌یابی معکوس ۱- مرکز با افزایش طول کمان‌ها روی شبکه درخت توجه کردند و نشان دادند این مسئله می‌تواند در زمان $O(n\log n)$ حل شود، درصورتی‌که ضریب هزینه‌ها با هم برابر باشد این پیچیدگی به $O(n)$کاهش خواهد یافت. توجه داشته باشید که در مقاله [۱۱] فقط بر روی افزایش طول کمان‌ها تمرکز شده و هیچ حد پایینی برای کاهش آن مطرح نشده است. درادامه، همان نویسندگان در مقاله‌ای دیگر الگوریتم ترکیباتی را برای مسائل مکان‌یابی معکوس ۱- مرکز مطلق (رأس) پیشنهاد دادند، درحالی‌که طول کمان‌های داده‌شده درخت بدون وزن در کم‌ترین هزینهٔ کل اصلاح شده است [۱۲].

هارتمن[۱۷] و همکارش کینکید[۱۸] [۱۳] با بررسی مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس *p*- میانه با کاهش طول کمان روی شبکهٔ درختی، تعدادی الگوریتم را برای حل این مسئله درحالی‌که $P=۱،۲$ است، ارائه کردند. ترانگ[۱۹] و همکارش

سپاسیان[۲۰] [۱۴] مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۱- مرکز را روی شبکهٔ درختی با طول کمان‌های متغیر تحت فاصله چبیشف بررسی کردند و نشان دادند درصورتی‌که هیچ تغییر مکانی به هنگام اصلاح طول‌ها وجود نداشته باشد، این مسئله با پیچیدگی $O(n\log n)$ همراه خواهد بود.

در بررسی‌های دیگر از مسائل معکوس میانه، ترانگ و شاسین[۲۱] مسئلهٔ معکوس ۱- میانهٔ محدب را تحت تابع هزینه‌ای که به فاصلهٔ چبیشف وابسته است بررسی کردند و نشان دادند که این مسئله در زمان $O(n^{2}\log n)$ حل‌شدنی است [۱۵]. ترانگ[۲۲] و کواک[۲۳] [۱۶] با درنظرگرفتن حالت عمومی مسائل معکوس ۱- میانه تحت عنوان مسئلهٔ *k-centerum* اثبات کردند که هرچند مسائل معکوس ۱- میانه در زمان چندجمله‌ای حل‌شدنی است، مسائل *k-centerum* جزء مسائل NP-Hard به‌شمار می‌آید. درواقع، آن‌ها در این مسئله نشان دادند درصورتی‌که $k=1$ باشد، مسئله به مسئلهٔ معکوس ۱- مرکز تبدیل خواهد شد.

به‌دنبال پژوهش‌های انجام‌شده در زمینهٔ مسائل مکان‌یابی معکوس، ترانگ در مقاله‌ای دیگر مسئلهٔ معکوس ۱- مرکز را که هدف آن مرکزی‌کردن یک گره از درخت بدون وزن در سقف بودجهٔ محدودی است که از بیرون به مسئله تحمیل می‌شود نیز بررسی کرده است [۱۷].

با حل بهینه‌سازی مسئله، معمولاً فرض می‌کنیم که پارامترهای مسئله مانند هزینه‌ها، ظرفیت، فاصله و غیره شناخته شده‌اند، اما در عمل ممکن است چیزی رخ دهد که مقدار دقیق پارامترها مشخص نباشد (مانند مسائل معکوس) و فقط تخمین‌هایی برای پارامترها وجود داشته باشد؛ بنابراین، هدف مکان‌یابی معکوس اصلاح تعدادی از پارامترهای مسئله از جمله طول کمان‌ها، وزن رئوس و درمجموع مختصات مراکز و تجهیزات به صورتی است که راه‌حلی شدنی به راه‌حلی بهینه تبدیل شود؛ بنابراین، پی‌بردن به این موضوع بسیار مهم است که کدام کمان یا کدامین رأس باید به‌ترتیب تغییر طول و تغییر وزن دهد، یا میزان این تغییر چقدر باشد تا ما را در زمینهٔ اصلاحاتی که انجام می‌شود، متحمل هزینه کمتری کند. در این مقاله به این موضوع پرداخته شده است.

تعریف و مدل‌سازی ریاضی مسئله

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد در این مقاله مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز با افزایش و کاهش طول کمان‌ها بررسی شده است. باید توجه داشت که درخت بدون وزن است و رأس‌های انتخابی برای مرکزی‌شدن باید درجهٔ بزرگ‌تر از یک داشته باشند؛ در غیر این صورت مسئله حل‌نشدنی خواهد بود. در این قسمت ابتدا مسئلهٔ مکان‌یابی ۲- مرکز، سپس مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز شرح داده شده و درنهایت با تعریف متغیرها و پارامترهای مسئله در قسمت بعد مدل بهینه‌سازی ریاضی مسئله ذکر شده است.

شبکهٔ درختی $T=(V,E)$ با مجموع رئوس $|V|=n$ و مجموعه کمان‌های E را درنظر بگیرید. در این درخت بدون وزن هر کمان طول مثبت l_{jk}^{i} دارد که ممکن است افزایش یا کاهش بیابد؛ به عبارت دیگر، هر کمان در حدود مشخصی مطابق زیر تغییر می‌کند که lb_{jk}^{i} و ub_{jk}^{i} به ترتیب بیانگر حد پایین و حد بالای طول هر کمان است.

$$l_{jk}^{i\;-}=l_{jk}^{i}-lb_{jk}^{i} \qquad (۱)$$

$$l_{jk}^{i\;+}=ub_{jk}^{i}-l_{jk}^{i} \qquad (۲)$$

در رابطهٔ ۱ و ۲، $l_{jk}^{i\;-}$ و $l_{jk}^{i\;+}$ به‌ترتیب بیانگر بیشترین مقداری است که کمان j زیرشاخه i زیر درخت k بتواند کاهش یا افزایش بیابد. مقدار این کاهش و افزایش طول کمان‌ها به‌ترتیب با dec_{jk}^{i} و Inc_{jk}^{i} نشان داده شده است؛ بنابراین:

$$l_{jk}^{i\;new}=l_{jk}^{i}-dec_{jk}^{i} \qquad (۳)$$

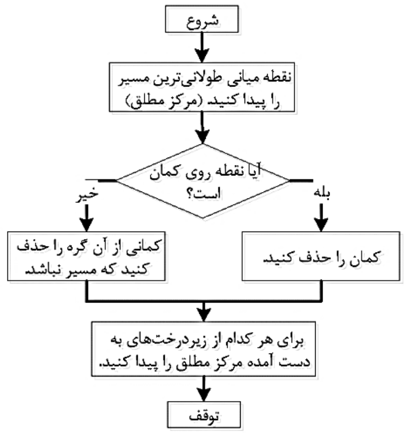
$$l_{jk}^{i\;new}=l_{jk}^{i}+Inc_{jk}^{i} \qquad (۴)$$

طول جدید هر کمان از روابط ۳ و ۴ به‌دست خواهد آمد. میزان این تغییر طول تا زمانی است که ارتفاع زیرشاخه‌های نشئت‌گرفته از رئوسی که باید مرکزی شوند، با هم برابر شود.

تعریف مسئلهٔ مکان‌یابی ۲- مرکز

منظور از مسئلهٔ مکان‌یابی ۲- مرکز، پیداکردن دونقطه در شبکهٔ درختی به‌منظور کمینه‌کردن کل هزینه است. منظور از این هزینه ممکن است میزان زمان یا مسافتی باشد که برای رسیدن از هر گره به گرهٔ مرکز باید طی شود. درنظر داشته باشید که روش حل برای مسائل مکان‌یابی ۲- مرکز تحت بررسی، بر پایهٔ روش داسکین [۲] ارائه شده است و نشان می‌دهد که برای به‌دست‌آوردن دو مرکز مطلق روی یک درخت بدون وزن می‌توان مطابق الگوریتم نشان‌داده شده در شکل ۱ عمل کرد.

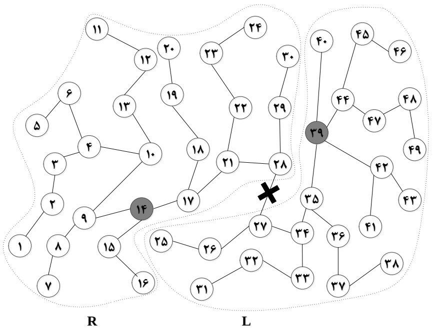
همان‌طور که در الگوریتم شکل ۱ مشاهده می‌کنید، برای به‌دست‌آوردن دو مرکز شبکهٔ درختی در ابتدا باید مرکز مطلق را به‌دست آورد سپس با حذف کمان یا رأسی که شامل این مرکز است، برای هریک از زیردرخت‌های به‌دست‌آمده به مرکزی مطلق دست یافت.



شکل ۱. الگوریتم مکان‌یابی ۲- مرکز مطلق روی درخت

تعریف مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز

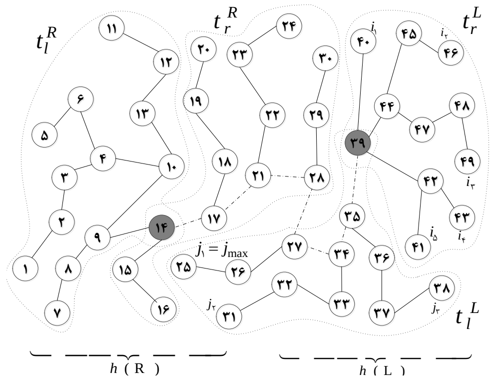
در اینجا مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز بررسی خواهد شد. شکل ۲ را درنظر بگیرید: فرض کنید باید دو گره مشخص‌شدهٔ ۱۴ و ۳۹ مرکزی شوند، درنتیجه باید شبکهٔ درختی در تمامی نقاط مابین دو رأس مشخص‌شده بررسی، و مدل ریاضی برای تمام این کمان‌ها حل شود، هریک هم که مقدار تابع هدف کمتری داشته باشد به‌عنوان حل بهینهٔ مسئله انتخاب خواهد شد؛ یعنی هریک از کمان‌ها که به‌عنوان کمان برش انتخاب شود از مسئله حذف، و درنتیجه درخت به دو زیر درخت L و R مطابق شکل ۲ تقسیم می‌شود.



شکل ۲. تقسیم‌شدن درخت T به دو زیر درخت L و R

مدل ریاضی مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز

در این بخش پس از تعریف پارامترها و متغیرهای مسئله، مدل ریاضی مسئله را بیان می‌کنیم. دقت کنید که این مدل به ازای تمام کمان‌های برش بین دو مرکز انتخابی که در شکل ۳ نشان داده شده است باید حل شود، درنهایت جواب بهینه با انتخاب کمینهٔ هزینه از بین جواب‌های به‌دست‌آمده، محاسبه خواهد شد. دقت کنید که در این درخت پس از حذف کمان برش، درخت به دو زیر درخت L و R تبدیل می‌شود که در هر زیر درخت مطابق قبل بزرگ‌ترین مسیر نشئت‌گرفته شده از مرکز شناخته‌شده l، و بقیهٔ زیردرخت‌ها r نامیده می‌شوند که این تقسیم‌بندی به‌وضوح در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. تقسیم‌بندی درخت حاصل از حذف کمان برش

پارامترها و متغیرهای این مدل به شرح ذیل هستند:

n: تعداد مسیرهای موجود در زیر درخت r هریک از درخت‌های R و L؛

m: تعداد مسیرهای موجود در درخت R (مسیرها شامل مراکز از پیش مشخص‌شده هستند)؛

l_e: طول کمان e؛

l_e^{up}: حد بالای طول کمان e؛

l_e^{low}: حد پایین طول کمان e؛

C_e^+: هزینهٔ افزایش طول کمان؛

C_e^-: هزینه کاهش طول کمان e؛

d_e^+: مقدار افزایش طول کمان e؛

d_e^-: مقدار کاهش طول کمان e؛

$h_{t_j}^k$: طول مسیر j ام از درخت k ام؛

$h_{t_{j\max}}^k$: طول بزرگ‌ترین مسیر j از درخت k ام؛

y_i^k: متغیر صفر و یک.

درصورتی‌که شاخهٔ iام از درخت k ام انتخاب شود مقدار ۱ می‌گیرد، در غیر این صورت مقدار صفر برای آن درنظر گرفته می‌شود.

ce: نماد کمان برش

در این مدل رابطهٔ ۵ بیانگر میزان هزینه‌ای است که در اثر تغییرات انجام‌شده روی طول کمان‌ها به‌وجود آمده و هدف، کمینه‌کردن هزینهٔ ناشی از این تغییرات است. در محدودیت‌های ۶ و ۷ نشان داده می‌شود که میزان تغییرات در هریک از درخت‌های به‌وجودآمده در اثر حذف کمان برش، باید به‌اندازه‌ای باشد که طول هر دو زیر درخت نشئت‌گرفته از مراکز مشخص‌شده با یکدیگر برابر شود. محدودیت ۸ نشان‌دهندهٔ این مفهوم است که مجموع میزان کاهش‌ها در هر زیر درخت نباید به‌اندازه‌ای باشد که طول این شاخه از طول زیر درخت دیگر موجود در این درخت کمتر شود. نامساوی‌های ۹ و ۱۰ بیان می‌کند که میزان تغییر طول هریک از کمان‌ها باید به نحوی باشد که اختلاف طول دو درخت به‌دست‌آمده در اثر حذف کمان برش کوچک‌تر، مساوی طول کمان برش باشد. روابط ۱۱ و ۱۲ نشانگر این مهم است که مجموع متغیرهای باینری y_i^k و y_i' باید با یک برابر باشد. نامساوی‌های ۱۳ و ۱۴ بیانگر این مفهوم هستند که تغییر طول کمان‌ها باید در حدود مشخصی رخ دهد.

$$LP(ce)$$

$$\min \sum_{e\in E}\left(C_e^+ d_e^+ + C_e^- d_e^-\right) + C_{ce}^+ d_{ce}^+ \qquad (۵)$$

$$\sum_{e\in t_i^k}\left(d_e^+ - d_e^-\right) - \sum_{e\in t_j^k}\left(d_e^+ - d_e^-\right) \ge h_{t_{j\max}}^k - h_{t_i}^k - M\left(۱-y_i^k\right) \qquad \forall i\in r, j\in l, k\in L,R \qquad (۶)$$

$$\sum_{e\in t_i^k}\left(d_e^+ - d_e^-\right) - \sum_{e\in t_j^k}\left(d_e^+ - d_e^-\right) \le h_{t_{j\max}}^k - h_{t_i}^k + M\left(۱-y_i^k\right) \qquad \forall i\in r, j\in l, k\in L,R \qquad (۷)$$

$$\sum_{e\in t_j^k} d_e^- \le \left(h_{t_{j\max}}^k - h_{t_i}^k\right) + \sum_{e\in t_i^k} d_e^- \qquad \forall i\in r, j\in l, k\in L,R \qquad (۸)$$

$$\left(h_{t_j} + \sum_{e\in t_j}\left(d_e^+ - d_e^-\right)\right) - \left(h_{t_i}\sum_{e\in t_i}\left(d_e^+ - d_e^-\right)\right) \le l_{ce} + d_{ce}^+ - M\left(۱-y_i'\right) \qquad \forall i\in R, j\in L \qquad (۹)$$

$$\left(h_{t_j} + \sum_{e\in t_j}\left(d_e^+ - d_e^-\right)\right) - \left(h_{t_i}\sum_{e\in t_i}\left(d_e^+ - d_e^-\right)\right) \ge -\left(l_{ce} + d_{ce}^+ - M\left(۱-y_i'\right)\right) \qquad \forall i\in R, j\in L \qquad (۱۰)$$

$$\sum_{i=۱}^{n} y_i^k = ۱ \qquad \forall k\in R,L \qquad (۱۱)$$

$$\sum_{i=۱}^{m} y_i' = ۱ \qquad (۱۲)$$

$$d_e^+ \le l_e^{up} - l_e \qquad \forall e\in E \qquad (۱۳)$$

$$d_e^- \le l_e - l_e^{low} \qquad \forall e\in E \qquad (۱۴)$$

$$d_{ce}^+ \le l_{ce}^{up} - l_{ce} \qquad (۱۵)$$

$$d_e^+, d_e^- \ge ۰ \text{ و } y_i^k, y_i' \in \{۰,۱\} \qquad \forall e\in E \qquad (۱۶)$$

دقت کنید که این مدل باید به ازای تمام کمان‌های برش بین دو مرکز انتخابی حل شود و درنهایت بهترین مقدار تابع هدف انتخاب گردد؛ یعنی در هرلحظه یکی از کمان‌های بین دو رأس انتخابی از مسئله حذف، و مدل ریاضی حل می‌شود، مقدار تابع هدف نیز ذخیره شده سپس مسئله به همین ترتیب برای کمان برش بعدی حل می‌شود، درنهایت هم کمترین مقدار تابع هدف به‌عنوان هزینهٔ ناشی از اصلاحات انتخاب می‌گردد.

الگوریتم حل تقریبی مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس

مدل ریاضی ارائه‌شده برای این مسئله از نوع برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط، و این نوع از مسائل NP-Complete

است [۱۸] همچنین با توجه به اینکه مسائل مکان‌یابی معکوس در مقایسه با مسائل مکان‌یابی، سخت‌ترند و پیچیدگی بیشتری دارند و جزء مسائل NP-Hard به‌شمار می‌آیند [۷] در این قسمت سعی شده است با ارائهٔ الگوریتمی که جواب مسئله را با تقریب بسیار خوبی ارائه می‌دهد، بتوان مسئله را بدون درنظرگرفتن مدل ریاضی آن حل کرد. این الگوریتم در شکل ۴ بیان شده و نمادها و پارامترهای به‌کاررفتهٔ آن به شرح ذیل است:

j : نماد کمان؛

i: نماد زیرشاخه؛

k: نماد درخت؛

J_{ik}: مجموعهٔ تمام کمان‌های زیرشاخه i درخت k؛

I_k: مجموعهٔ تمام زیرشاخه‌های درخت k؛

K: مجموعهٔ تمامی درخت‌ها؛

l_{jk}^{i}: طول کمان jام زیرشاخه i ام زیر درخت k ام؛

${C_{jk}^{i}}^{+}$: هزینهٔ افزایش طول کمان j زیرشاخه i درخت k؛

${C_{jk}^{i}}^{-}$: هزینهٔ کاهش طول کمان j زیرشاخه i درخت k؛

$h_L^k(R)$: طول طولانی‌ترین مسیر زیر درخت R درخت k؛

$h_L^k(L)$: طول طولانی‌ترین مسیر زیر درخت L درخت k؛

$L_i(P_{S^KZ})$: طول زیرشاخه i مسیر s^Kz زیر درخت k؛

dic_{jk}^{i}: مقدار کاهش طول کمان j زیرشاخه i درخت k؛

inc_{jk}^{i}: مقدار افزایش طول کمان j زیرشاخه i درخت k.

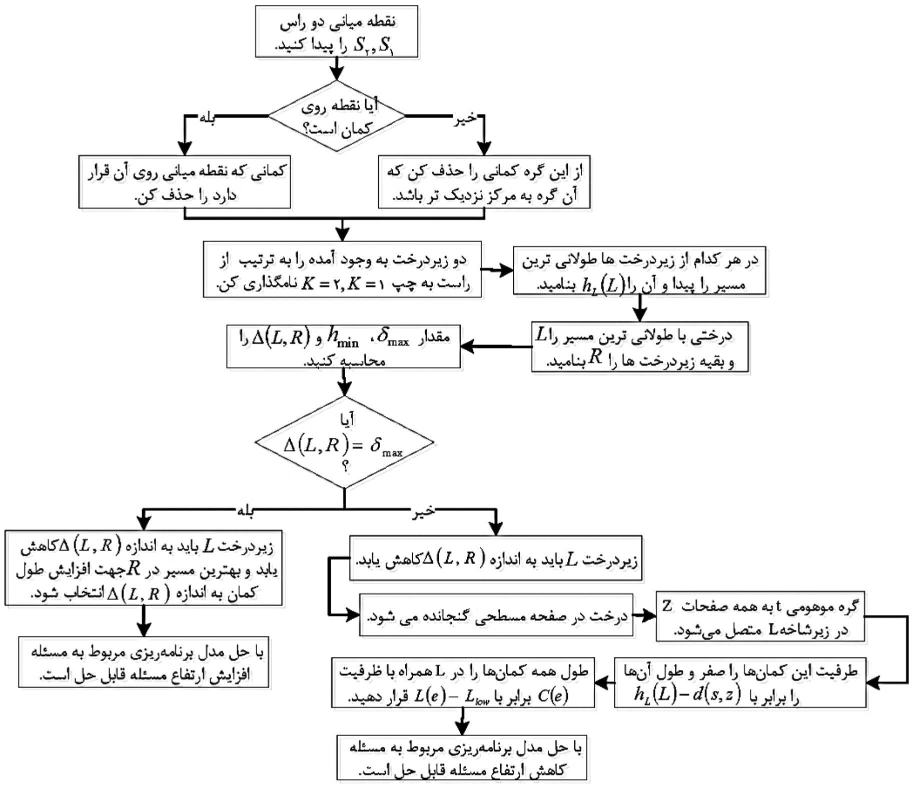
مقدار کاهش ارتفاع مسئله در زیر درخت L

برای کاهش از روش مبتنی بر روش ژانگ است استفاده می‌شود. در ابتدا برای توضیح این روش باید مقادیر زیر را به‌دست آورد:

$$\Delta^k(L,R)=\min\left\{\delta_{\max}^k, h_L^k(L)-h_L^k(R)\right\} \quad (۱۷)$$

$$\delta_{\max}^k=h_L^k(L)-h_{\min}^k \quad (۱۸)$$

$$h_{\min}^k=\max_i\left\{L_i\left(P_{S^KZ}\right)-L_i\left(P_{S^KZ}\right)^-\right\} \quad (۱۹)$$



شکل ۴. الگوریتم حل تقریبی مسئله مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز

رابط ۱۷ بیانگر مقداری است که باید زیردرخت‌های L و R به ترتیب کاهش و افزایش یابد؛ به عبارت دیگر، این مقدار بیانگر بیشترین مقداری است که کمان‌های یک زیرشاخه مجاز به کاهش یا افزایش هستند. در تساوی ۱۸

$\delta_{\max}^{k}$ گویای بیشترین مقدار کاهش طول زیر درخت L، درخت k است. مقدار $h_{\min}^{k}$ نیز که بیانگر طول کوتاه‌ترین مسیری است که زیر درخت L درخت k می‌تواند به آن دست یابد، از محدودیت ۱۹ به‌دست خواهد آمد. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، اکنون مطابق مقداری که برای $\Delta^k(L,R)$ به‌دست می‌آید، باید برای میزان کاهش طول کمان‌ها تصمیم‌گیری شود؛ به عبارت دیگر، اگر مقدار Δ با $\delta_{\max}$ برابر باشد باید طول زیر شاخهٔ L را به‌اندازهٔ $\delta_{\max}$ کاهش دهیم و طول زیر درخت R را نیز به‌اندازهٔ طول جدید زیرشاخهٔ L بیشتر کنیم که نحوهٔ این افزایش طول در ادامه توضیح داده شده است. در صورتی که مقدار Δ با $h_l(L)-h_l(R)$ برابر باشد، به افزایش طول کمان‌های زیرشاخه R نیازی نیست و فقط باید طول کمان‌ها زیرشاخهٔ L را به‌اندازهٔ مابه‌التفاوت طول دو زیر درخت R و L مطابق مدل (LP_k) کاهش داد.

حال برای مسئلهٔ کاهش ارتفاع همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد، باید به‌صورت زیر عمل کرد:

الف) زیر درخت L در صفحه‌ای مسطح گنجانیده شود.

ب) گرهٔ موهومی t به همهٔ صفحات z از طریق زیر درخت L اضافه شود.

ج) طول این کمان‌های اضافه‌شده را برابر با $h_L-d(s,z)$ و هزینهٔ آن‌ها را برابر با صفر قرار دهید.

علاوه‌بر این به هریک از کمان‌ها در زیر درخت L مقدار ${l_{jk}^{i}}^{-}$ را به‌عنوان طول کمان و ${C_{jk}^{i}}^{-}$ را به‌عنوان هزینهٔ کاهش طول کمان درنظر بگیرید.

کمان‌های با طول صفر را از زیرشاخهٔ L حذف کنید. در اینجا یک کمینهٔ برش *Cut(c)* در این شبکه تعیین می‌شود.

طول کوتاه‌ترین کمان در *Cut(c)* را برابر dic^k قرار دهید و در هر مرحله مقدار طول کمان‌ها را برابر با آن مقدار کاهش دهید تا به مقدار $\Delta^k(L,R)$ برسید. دقت کنید که در این مرحله کمان‌هایی که در مسیرهای مشترک زیرشاخه‌ها قرار دارد از محاسبات حذف شوند.

$$\Delta^k(L,R)=\sum_{k=i} dec^k \qquad (۲۰)$$

اکنون مدل ریاضی این مسئله به‌صورت زیر بیان خواهد شد.

(LP_k)

$$\min \sum_{j\in J_{ik}} {C_{jk}^{i}}^{-} dec_{jk}^{i} \qquad (۲۱)$$

$$\sum_{j=1} dec_{jk}^{i}=\Delta^k(L,R) \qquad \forall i\in I_k \qquad (۲۲)$$

$$dec_{jk}^{i}\le {l_{jk}^{i}}^{-} \qquad \forall j\in J_{ik}, i\in I_k \qquad (۲۳)$$

$$dec_{jk}^{i}\ge 0 \qquad \forall j\in J_{ik}, i\in I_k \qquad (۲۴)$$

در مدل بیان‌شده در بالا رابطهٔ ۲۰ مقدار تابع هدف را نشان می‌دهد که بیانگر هزینهٔ ناشی از کاهش طول کمان‌هاست. محدودیت ۲۱ بیان می‌کند که مجموعه افزایش‌ها در زیرشاخه‌های زیر درخت L باید با مقدار $\Delta^k(L,R)$ برابر باشد. در محدودیت برابر ۲۲ نیز می‌بینیم، میزان کاهش طول هر کمان همواره باید با بیشترین مقداری که کمان j زیرشاخهٔ i در درخت k بتواند کاهش دهد برابر باشد توجه داشته باشید که این مدل برای کل زیرشاخه‌های موجود در زیر درخت L فقط یک‌بار نوشته می‌شود. درواقع جواب حاصل از این مدل، آن کمان‌هایی را مشخص می‌کند که باید افزایش یابد تا طول دو زیر درخت با هم برابر باشد.

مقدار افزایش ارتفاع مسئله در زیر درخت R

اکنون حالتی را فرض کنید که مقدار Δ با $\delta_{\max}$ برابر باشد، در این صورت باید در زیر درخت R بهترین زیرشاخه برای افزایش طول استفاده شود؛ بنابراین، مدل افزایش ارتفاع به‌صورت زیر بیان، و به‌ازای تمام زیرشاخه‌های موجود در زیر درخت R حل می‌شود. r_i نشانگر تعداد کمان‌هایی است که در مسیر i وجود دارد.

(LP_{ik})

$$LP_{ik}:\min \sum_{j\in J_{ik}} {C_{jk}^{i}}^{+} Inc_{jk}^{i} \qquad (۲۵)$$

$$\sum_{j\in J_{ik}}^{r_i} Inc_{jk}^{i}=h_L^k(L)-\Delta^k(L,R)-L_i\left(P_{S^K Z}\right) \qquad (۲۶)$$

$$Inc_{jk}^{i}\le {l_{jk}^{i}}^{+} \qquad \forall j\in J_{ik} \qquad (۲۷)$$

$$Inc_{jk}^{i}\ge 0 \qquad \forall j\in J_{ik} \qquad (۲۸)$$

$$j\in\{1,..,r_i\} \qquad 1\le r_i\le n \qquad (۲۹)$$

در مدل خطی بیان‌شده، رابطهٔ ۲۵ بیانگر تابع هدف مسئله است که مقدار هزینهٔ ناشی از افزایش طول کمان را نشان می‌دهد.

در محدودیت ۲۶ نیز می‌بینیم که مجموع افزایش طول کمان‌های هر زیرشاخه با مقداری برابر است که هر

زیرشاخه باید افزایش یابد تا طولش با طول بزرگ‌ترین مسیر برابر شود. نابرابری ۲۷ بیانگر این مفهوم است که همواره مقدار این افزایش طول نباید از بیشترین مقدار مجاز افزایش طول هر کمان $(ub_{jk}^{i}-l_{jk}^{i})$ بیشتر باشد. درنهایت، با استفاده از جواب به‌دست‌آمده از حل مسئلهٔ مدل خطی بالا زیرشاخه‌ای که باید طول کمان‌هایش افزایش یابد تا نقطهٔ S^{k} مربوط به آن زیر درخت مرکزی شود مشخص خواهد شد.

مثال و محاسبات عددی

به‌منظور بررسی و اعتبارسنجی الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله و مقایسهٔ نتایج آن با مدل مسئله، شبکهٔ درختی شکل ۱ با ۴۹ گره و ۴۸ کمان بررسی شده است. توجه داشته باشید که در این مسئله حدود پایین برای کمان‌ها طوری درنظر گرفته شده است که هیچ تغییر مکانی برای گره‌ها و کمان‌ها اتفاق نیفتد؛ به عبارت دیگر، حدود پایین برای تمامی کمان‌ها، مخالف با صفر درنظر گرفته شده است تا در مسئلهٔ کاهش ارتفاع، هیچ کمانی از بین نرود. اعداد مربوط به طول کمان‌ها هر زیر درخت، حدود بالا و پایین کمان‌ها، همچنین هزینهٔ ناشی از کاهش و افزایش طول در جدول ۱ بیان شده است. این اعداد به‌صورت تصادفی تولید شده‌اند تا بتوان بر اساس آن‌ها مدل را تحلیل و بررسی کرد و حساسیت آن را به پارامترها نشان داد.

حال در هر مرحله گره‌های انتخابی را برای مرکز شدن تغییر می‌دهیم. نتایج حاصل از محاسبات و تحلیل حساسیت‌های حاصل از الگوریتم تقریبی ارائه‌شده برای مسئله به‌اختصار در جدول ۲ بیان شده است. در جدول ۳ نتایج حاصل از حل بهینه برای هریک از این مراکز نیز با مدل ریاضی ارائه شده با نتایج حاصل از الگوریتم تقریبی مقایسه شده است. نمادهای به‌کاررفته در جدول به شرح زیر است:

A: درصد ظرفیت استفاده‌شده از بیشترین مقدار کاهش؛

B: درصد ظرفیت استفاده‌شده از بیشترین مقدار افزایش؛

Z: مقدار تابع هدف؛

ω: زیرشاخه‌ای که به‌منظور افزایش ارتفاع تغییر کرده است.

برای اعتبارسنجی الگوریتم تقریبی ارائه‌شده در هر مرحله گرهٔ انتخابی برای مرکز تغییر داده شده و نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۲ گنجانیده شده است. درادامه، با تحلیل مقادیر به‌دست‌آمده برای هرکدام از گره‌های انتخابی توسط الگوریتم تقریبی، در مورد نتایج به‌دست‌آمده توضیح بیشتری ارائه خواهیم کرد.

همان‌طور که مقادیر تابع هدف حاصل‌شده نشان می‌دهد هرچقدر به گره‌های انتهایی درخت نزدیک‌تر شوید هزینهٔ بیشتری برای مرکزی‌شدن نقاط باید بپردازید؛ برای مثال هنگامی‌که گره‌های ۱۴، ۳۹ برای مرکزی‌شدن انتخاب شود، هزینه‌ای معادل ۱۴۳ واحد پولی باید صرف شود، درصورتی‌که با انتخاب گره‌های ۴۴، ۴ که به انتهای درخت نزدیک‌تر هستند این مقدار به ۲۹۷۵ واحد افزایش خواهد یافت. این موضوع برای گره‌های ۱۴، ۳۵ نیز که وضعیتی مشابه دارند نیز صدق می‌کند.

با مقایسهٔ مجموعه گره‌های ۳۹، ۱۰، ۳۹، ۱۴ و ۳۹، ۱۷ مشاهده می‌شود که این سه مجموعه گرهی مشترک دارند و هزینهٔ ناشی از مرکزی‌شدن آن‌ها به ترتیب با ۳۹۴، ۱۴۳ و ۲۲۴ برابر است. این تفاوت هزینه ممکن است ناشی از فاصله‌ای باشد که ۳۹ از سایر گره‌های مجموعه دارد. البته این موضوع گفته‌های قبل را نیز تصدیق می‌کند؛ به عبارتی گرهٔ ۱۰ در مقایسه با گرهٔ ۱۴ به انتهای درخت نزدیک‌تر است که این امر سبب افزایش هزینه به مجموعه دوم شده است، همچنین گرهٔ ۱۷ نیز در وضعیتی عکس حالت قبل به گره ۳۹ نزدیک‌تر است که این امر نیز سبب افزایش هزینه در مقایسه با مجموعهٔ دوم شده است، همچنین چنانچه گره‌های انتخابی خیلی به یکدیگر نزدیک‌تر شوند، در بیشتر مواقع مرکزی‌شدن آن‌ها غیرممکن خواهد بود؛ برای نمونه این امر درمورد گره‌های ۲۱، ۳۴ و ۲۱، صدق خواهد کرد، همچنین نتایج نشان می‌دهد چنانچه گره‌های انتخابی برای مرکزی‌شدن، ورودی و خروجی بیشتری داشته باشد احتمال نشدنی‌بودن جواب کمتر خواهد بود.

اکنون در جدول ۳، نتایج حاصل از حل الگوریتم تقریبی با نتایج حاصل از حل بهینهٔ مسئله با استفاده از مدل ریاضی مقایسه، و درصد اختلاف حاصل از دو نتیجه نیز عنوان شده است. درواقع این درصد، بیانگر میزان اختلاف دو نتیجهٔ تقریبی و بهینه است که میزان این اختلاف تقسیم بر مقدار بهینه شده است.

جدول ۱. داده‌های مربوط به طول کمان‌ها، حدود بالا و پایین کمان و هزینه‌های ناشی از افزایش و کاهش طول

کمان	۱-۲	۲-۳	۳-۴	۵-۶	۴-۶	۴-۱۰	۷-۸	۸-۹	۹-۱۰	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۰-۱۳	۹-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۴-۱۷
l_{jk}^{i}	۸	۹	۵	۱۰	۱	۷	۶	۱۰	۱۵	۱۲	۳	۵	۶	۷	۱۰	۷
ub_{jk}^{i}	۱۵	۱۲	۷	۱۷۰	۸	۱۰	۱۲	۱۵	۱۸	۱۵	۸	۷	۱۳	۲۱	۱۵	۱۲
lb_{jk}^{i}	۶	۹	۴	۹	۱	۳	۵	۸	۱۳	۷	۱	۴	۴	۶	۵	۵
$C_{jk}^{i\,+}$	۴	۸	۱۴	۸۸	۱۰	۱۸	۴	۵	۱۸	۵	۴	۶	۲۰	۸	۴	۱۴
$C_{jk}^{i\,-}$	۲	۷	۵	۳	۷	۴	۲	۴	۱۰	۱۰	۴	۳	۱۲	۱	۴	۷
کمان	۱۷-۱۸	۱۸-۱۹	۱۹-۲۰	۱۷-۲۱	۲۱-۲۲	۲۲-۲۳	۲۳-۲۴	۲۱-۲۸	۲۵-۲۶	۲۶-۲۷	۲۷-۲۸	۲۸-۲۹	۲۹-۳۰	۲۷-۳۴	۳۱-۳۲	۳۲-۳۳
l_{jk}^{i}	۲	۱۳	۹	۴	۸	۴	۹	۶	۹	۸	۸	۴	۷	۱۲	۶	۵
ub_{jk}^{i}	۷	۱۰۰	۱۴	۵	۱۰	۸	۱۳	۱۰	۱۲	۱۳	۱۴	۸	۱۰	۱۴	۱۲	۷
lb_{jk}^{i}	۲	۶	۶	۳	۵	۲	۴	۵	۷	۵	۵	۲	۳	۱۱	۵	۱
$C_{jk}^{i\,+}$	۸	۲۰	۳	۸	۶	۱۰	۴	۱۰	۷	۳	۵	۱۲	۷	۵	۱۱	۲
$C_{jk}^{i\,-}$	۱۳	۸	۴	۴	۵	۲	۳	۵	۴	۳	۳	۷	۱۲	۷	۸	۱
کمان	۳۳-۳۴	۳۴-۳۵	۳۵-۳۶	۳۶-۳۷	۳۷-۳۸	۳۵-۳۹	۳۹-۴۰	۴۱-۴۲	۳۹-۴۲	۴۲-۴۳	۳۹-۴۴	۴۴-۴۵	۴۵-۴۶	۴۴-۴۷	۴۷-۴۸	۴۸-۴۹
l_{jk}^{i}	۱۳	۲	۹	۱۴	۲	۸	۱۸	۱۷	۱	۱۶	۴	۲	۱۲	۱۳	۴	۹
ub_{jk}^{i}	۱۴	۵	۱۴	۱۷	۴	۱۴	۲۵	∞	۸	۱۸	۷	۶	۱۷	۱۵	۸	۲۰۰
lb_{jk}^{i}	۱۱	۲	۷	۱۰	۱	۶	۱۶	۱۲	۱	۱۵	۲	۱	۸	۱۰	۱	۸
$C_{jk}^{i\,+}$	۷	۱۲	۷	۳	۲	۵	۱۰	۱۳۵	۱۸	۷	۸	۸	۴	۱۲	۱۴	۱۰۰
$C_{jk}^{i\,-}$	۵	۴	۷	۴	۲	۷	۶	۴	۱۰	۸	۱۳	۴	۲	۸	۲	۱۲

جدول ۲. نتایج حاصل از بررسی شبکهٔ درختی شکل ۱ با استفاده از الگوریتم تقریبی

شماره مسئله	مرکز انتخابی		مسئلهٔ کاهش ارتفاع						مسئلهٔ افزایش ارتفاع								مجموع مقدار Z (نتایج تقریبی)
			$k=۱$			$k=۲$			$k=۱$				$k=۲$				
	$s^{۱}$	$s^{۲}$	$h_l(L)$	$A\%$	z	$h_l(L)$	$A\%$	z	ω	$h_l(R)$	$B\%$	z	ω	$h_l(R)$	$B\%$	z	
۱	۳۹	۱۴	۳۹	۱۰۰	۳۹	۵۰	۱۰۰	۶۹	$t_{۱}^{۶}$	۳۰	۲	۸	$t_{۲}^{۶}$	۳۱	۷/۸	۲۷	۱۴۳
۲	۴۴	۴	۵۳	۱۰۰	۱۱۸	۶۰	۱۰۰	۱۸۰	$t_{۱}^{۷}$	۲۶	۶/۵	۷۸۰	$t_{۲}^{۴}$	۱۱	۱۶/۷	۱۸۹۷	۲۹۷۵
۳	۳۵	۱۴	۳۸	۳/۴	۳۶	۵۰	۱۰۰	۶۹	–	–	–	–	$t_{۲}^{۶}$	۳۱	۷/۸	۲۷	۱۳۲
۴	۳۴	۲۱	۴۰	۸۴/۶	۶۴		نشدنی		–	–	–	–			نشدنی		–
۵	۳۹	۱۷	۳۸	۱۰۰	۹۴	۵۷	۱۰۰	۸۳	$t_{۱}^{۵}$	۲۶	۰/۵	۱۲	$t_{۲}^{۴}$	۳۵	۴۷/۴	۳۵	۲۲۴
۶	۲۸	۲۱		نشدنی			نشدنی				نشدنی				نشدنی		–
۷	۳۹	۱۰	۴۱	۹۱/۶	۱۰۱	۵۳	۹۴	۱۵۹	–	–	–	–	$t_{۲}^{۴}$	۲۹	۵۳/۳	۱۳۴	۳۹۴
۸	۳۲	۱۸		نشدنی			نشدنی				نشدنی				نشدنی		–

جدول ۳. نتایج حاصل از حل بهینهٔ مسئله با مدل MIP

رئوس انتخابی	نتایج بهینه	نتایج تقریبی	درصد اختلاف
(۱۴,۳۹)	۱۳۸	۱۴۳	٪۳/۶۲
(۱۰,۳۹)	۳۸۵	۳۹۴	٪۲/۳۳
(۱۷,۳۹)	۲۱۷	۲۲۴	٪۳/۲۲
(۲۱,۳۴)	نشدنی	نشدنی	–
(۲۱,۲۸)	نشدنی	نشدنی	–
(۱۸,۳۲)	نشدنی	نشدنی	–
(۱۴,۳۵)	۱۲۶	۱۳۲	٪۴/۷۶
(۴,۴۴)	۲۸۹۹	۲۹۷۵	٪۲/۶۲

همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از حل مدل ریاضی با نرم‌افزار گمز که جواب بهینهٔ مسئله است، به جواب تقریبی به‌دست‌آمده با الگوریتم بسیار نزدیک است و به‌صورت میانگین، ۳ درصد اختلاف دارند؛ بنابراین، این امر به‌خوبی نشان می‌دهد که الگوریتم ارائه‌شده با تقریب بسیار خوبی می‌تواند جواب مسئله را تخمین بزند.

مطالعهٔ موردی

شبکهٔ حمل‌ونقل نقشی اساسی در امدادرسانی و نجات جان انسان‌ها پس از وقوع حوادث دارد و عملکرد بهینهٔ آن ممکن است سبب کاهش اثرات مستقیم و غیرمستقیم بحران شود [۱۹].

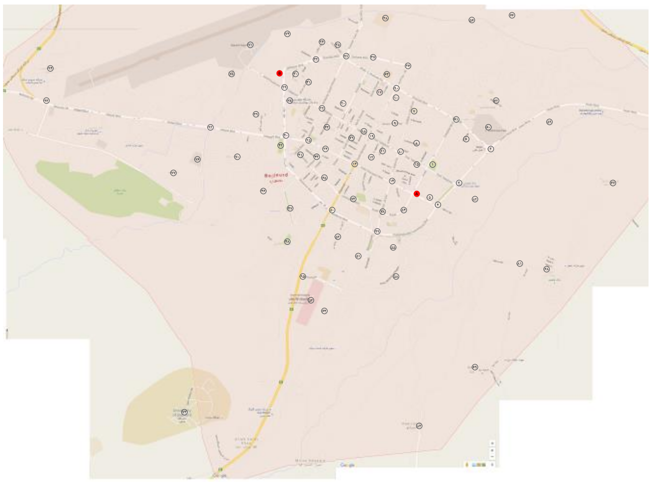
در مهندسی ترافیک به‌منظور سهولت عبور و مرور، راه‌ها و تقاطع‌ها مرمت و احداث می‌شود و چراغ‌ها و تابلوهای راهنمایی در مکان‌های مورد نظر قرار می‌گیرد، همچنین خط‌کشی‌های مورد نیاز انجام می‌گیرد. افزون بر این، به‌منظور کاهش میزان شلوغی در ساعات اوج ترافیک، به‌ویژه در شهرهای شلوغ از طرح‌های ترافیک، طرح‌های زوج و فرد و مسیرهای ویژه برای عبور و مرور استفاده می‌شود. حال برای نشان‌دادن اهمیت این موضوع و کاربرد عملی مسائل مکان‌یابی معکوس مطابق شکل ۵، مکان دو ایستگاه آتش‌نشانی مهم در شهرستان بجنورد مدنظر قرار گرفته و تغییرات لازم برای مرکزی‌شدن مکان این دو آتش‌نشانی و هزینهٔ لازم برای این امر برآورد شده است.

منظور از مرکزی‌شدن میزان زمانی است که برای رسیدن از منطقه‌ای به منطقهٔ دیگر باید سپری شود؛ زیرا امروزه به دلیل حجم ترافیک و افزایش میزان تردد، به‌ویژه در مرکز شهرها این امکان وجود دارد که در بعضی موارد خدمات کمک‌رسانی با تأخیر انجام شود که این خود سبب نارضایتی و ازبین‌رفتن عدالت اجتماعی می‌شود؛ بنابراین این ایستگاه‌ها باید در مناطقی احداث شود که از نظر زمانی در مناطق پرترافیک و خلوت‌تر هم خدمات یکسان و به‌موقعی را به شهروندان ارائه دهد. از آنجا که این ایستگاه‌ها از قبل وجود داشتند و امکان مکان‌یابی دوباره آن‌ها وجود ندارد، تصمیم‌گیرنده می‌تواند تعدادی از پارامترهای مسئله مانند خطوط حمل‌ونقل شهری را طوری اصلاح کند که مکان این ایستگاه‌های آتش‌نشانی به مکان مرکزی تبدیل شود. منظور از اصلاح خطوط استفاده از مسیرهای ویژه، یک‌طرفه‌کردن خیابان‌های پرتردد، استفاده از طرح‌های زوج و فرد و خدماتی از این قبیل است. همان‌طور که در شکل ۵ مشخص است مکان این دو آتش‌نشانی در دو گوشهٔ شهر واقع شده و سایر مناطق شهر با توجه به اینکه به کدام‌یک از آتش‌نشانی‌ها نزدیک است، برای آن‌ها درنظر گرفته شده است، درنتیجه شکل شبکهٔ حاصل به‌صورت درخت درآمده است. باید توجه داشت که فواصل زمانی بین مسیرها از طریق گوگل مپ به دست آمده و در خصوص هزینهٔ درنظر گرفته‌شده برای هر مسیر ضریب هزینهٔ یکسانی درنظر گرفته شده است؛ بنابراین، این هزینه در بهینه‌سازی تأثیرگذار نخواهد بود. برای تعیین حدود پایین کمان‌هایی که در مسیرهای پرتردد شهر قرار دارد از اعدادی که گوگل مپ به‌دست آورده استفاده شده است و برای هرکدام از کمان‌ها اعدادی مطابق با واقعیت قرار داده شده است؛ علاقه‌مندان برای دسترسی به اعداد به لینک زیر مراجعه کنند.

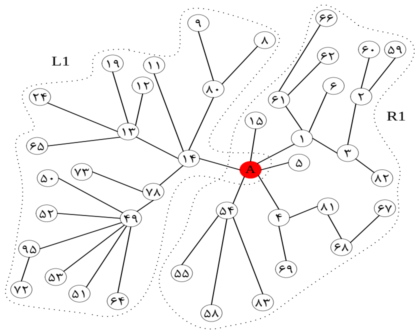
http://wp.kntu.ac.ir/hkarimi/files/BojnourdData.rar

اکنون به‌منظور بررسی مرکزی‌بودن مکان این دو آتش‌نشانی، مطابق گفته‌های قبلی پس از تشخیص مسیر بین دو آتش‌نشانی و پیداکردن نقطهٔ میانی، شبکهٔ درختی مطابق شکل‌های ۶ و ۷ به دو زیر درخت تقسیم، و نتایج حاصل از مرکزی‌شدن این دو ایستگاه در ادامه بیان می‌شود. درنظر داشته باشید که در مطالعهٔ موردی تنها مسئلهٔ کاهش طول مدنظر است؛ یعنی از آنجا که افزایش طول در این مطالعه به معنی افزایش زمان رسیدن آتش‌نشان به نقطهٔ مربوط است و این موضوع کمی غیرعادی به‌نظر می‌رسد، فقط، روی کاهش زمان رسیدن بحث شده است.

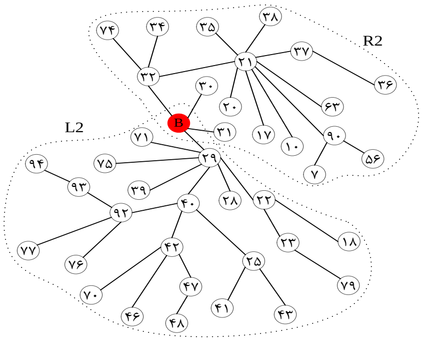
همان‌طور که در شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، برای هر دو درخت T^1 و T^2 زیردرخت‌های L و R جدا شده است. نتایج نشان می‌دهد که در درخت T^1 طول طولانی‌ترین مسیر با ۲۶ برابر است که برای مرکزی‌شدن این آتش‌نشانی به هزینه‌ای برابر با ۲۶ واحد پولی نیاز است که تنها ۶۸ درصد از کل ظرفیت طولانی‌ترین مسیر برای کاهش را شامل می‌شود. همچنین در درخت T^2 طول طولانی‌ترین مسیر برابر با ۱۹ است که برای مرکزی‌شدن آتش‌نشانی در این درخت باید از ۱۰۰ درصد ظرفیت زیر درخت L استفاده کرد، همچنین هزینهٔ این مسیر با ۵ واحد پولی برابر خواهد بود.



شکل ۵. شبکهٔ شهری شهرستان بجنورد



شکل ۶. زیر درخت T_1 در اثر حذف کمان برش (سمت راست)



شکل ۷. زیردرخت T_2 در اثر حذف کمان برش (سمت چپ)

نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس ۲- مرکز با افزایش و کاهش طول کمان‌ها روی شبکه درختی بررسی شد که هدف آن اصلاح طول کمان‌ها با کمترین هزینهٔ ممکن به‌منظور مرکزی‌شدن نقاط از قبل مشخص شده است. در این راستا نشان داده شد که هر اندازه نقاط درنظر گرفته‌شده برای مرکز به گره‌های انتهایی درخت نزدیک‌تر باشد، باید هزینهٔ بیشتری برای مرکزی‌شدن نقاط متحمل شد، همچنین چنانچه گره‌های انتخابی خیلی به یکدیگر نزدیک شوند، در بیشتر مواقع مرکزی‌شدن آن‌ها ممکن نیست، همچنین به‌منظور نشان‌دادن کاربرد عملی این مسئله در واقعیت شبکهٔ شهری شهرستان بجنورد به همراه دو آتش‌نشانی مهم این شهر که نقش همان دو مرکز را بازی می‌کنند، درنظر گرفته و درنتیجه اصلاحات در طول کمان‌ها مشخص‌شده است.

از آنجا که در دنیای واقعی اغلب با زیرساخت‌ها و بافت‌های شهری مواجه هستیم که امکان مکان‌یابی مجدد برای آن‌ها وجود ندارد و در بیشتر مواقع تعداد مراکز موجود حداقل بیشتر از دو مرکز است، پیشنهاد می‌شود برای توسعهٔ این مقاله، مسئلهٔ مکان‌یابی p- مرکز معکوس بررسی شود. همچنین بسیاری از مراکزی که برای بررسی انتخاب می‌شوند از نظر اهمیت با یکدیگر برابر نیستند؛ بنابراین می‌توان برای هریک از آن‌ها وزنی را درنظر گرفت که نشان‌دهندهٔ درجه اهمیت آن مرکز است؛ درنتیجه برای رسیدن به این مهم باید مسئلهٔ مکان‌یابی معکوس روی شبکه‌های درختی وزن‌دار را بررسی کرد. علاوه‌بر این، ارائهٔ الگوریتم‌هایی دقیق به‌منظور حل این مسائل به‌جای استفاده از رویکرد مدل ریاضی نیز پیشنهاد می‌شود.

منابع

1. Hakimi, S. L. (1965). "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems." *Operations Research*, Vol. 13, No. 3, pp. 462-475.
2. Daskin, M. (1997). Network and discrete location: Modeles, algorithms and applications. Wiley, New York.

3. Drezner, Z., Hamacher, H. W. (Eds.). (2001). Facility location: applications and theory. *Springer Science and Business Media.*
4. Love, R. F., Morris, J. G., and Wesolowsky, G. O. (1988). Facilities location. Chapter, 3, pp. 51-60.
5. Burton, D., and Toint, P. L. (1992). "On an instance of the inverse shortest paths problem." *Mathematical Programming*, Vol. 53, No. 1, pp. 45-61.
6. Heuberger, C. (2004). "Inverse combinatorial optimization: A survey on problems, methods, and results." *Journal of combinatorial optimization*, Vol. 8, No. 3, pp. 329-361.
7. Cai, M. C., Yang, X. G., and Zhang, J. Z. (1999). "The complexity analysis of the inverse center location problem." *Journal of Global Optimization*, Vol. 15, No. 2, pp. 213-218.
8. Yang, X., and Zhang, J. (2008). "Inverse center location problem on a tree." *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 21, No. 4, pp. 651–664.
9. Burkard, R. E., Pleschiutschnig, C., and Zhang, J. (2004). "Inverse median problems." *Discrete Optimization*, Vol. 1, No. 1, pp. 23-39.
10. Burkard, R. E., Pleschiutschnig, C., and Zhang, J. (2008). "The inverse 1-median problem on a cycle." *Discrete Optimization*, Vol. 5, No. 2, pp. 242-253.
11. Alizadeh, B., Burkard, R. E., and Pferschy, U. (2009). "Inverse 1-center location problems with edge length augmentation on trees." *Computing*, Vol. 86, No. 4, pp. 331-343.
12. Alizadeh, B., Burkard, R. E. (2011). "Combinatorial algorithms for inverse absolute and vertex 1-center location problems on trees." *Networks*, Vol. 58, No. 3, pp. 190-200.
13.Hartman, J. M., and Kincaid, R. K. (2014). "P-Median Problems with Edge Reduction." *Systems and Information Engineering Design Symposium*, pp. 159-161.
14. Nguyen, K. T., Sepasian, A. R. (2016). "The inverse 1-center problem on trees with variable edge lengths under Chebyshev norm and Hamming distance." *Combinatorial Optimization*, Vol. 32, No. 3, pp. 872-884.
15. Nguyen, K. T., Chassein, A. (2015). "The inverse convex ordered 1-median problem on trees under Chebyshev norm and Hamming distance." *European Journal of Operational Research*, Vol. 247, No. 3, pp. 774-781.
16. Nguyen, K. T., and Anh, L. Q. (2015). "Inverse k-centrum problem on trees with variable vertex weights." *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 82, No. 1, pp. 19-30.
17. Nguyen, K. T. (2016). "Reverse 1-center problem on weighted trees." *Optimization*, Vol. 65, No. 1, pp. 253-264.
18. Wolsey, L., Nemhauser, G. (1999). "Integer and Combinatorial Optimization."
19. Rashidifard, N., et al., (2014). "Optimal locate fire stations in urban traffic networks to aid the earthquake (Case study: Dehdasht)." Scientific- Research Quarterly of Geograghical data (SEPEHR), Article 6, Vol. 23, pp. 48-53, (In Persian).

واژه‌های انگلیسی به‌ترتیب استفاده در متن

1. Hakimi
2. Minisum
3. Minimax
4. Daskin
5. Hamacher
6. Love
7. Road Network
8. Absolute 2-Center Location Problems
9. Burton
10. Toint
11. Heuberger
12. Cai
13. Yang
14. Zhang
15. Burkard
16. Cycle
17. Hartman
18. Kincaid
19. Trung Nguyen
20. Sepasian
21. Chassein
22. Trung
23. Quoc